Банаховы пространства нетривиального типа (1)

(по книге Diestel, Jarschow, Tonge „Absolutely summing operators")

I B-выпуклость.

<u>Опр.</u> Банахово пространство X назовём B-выпуклым, если существуют число $\delta>0$ и натуральное число n, такие что для всякого набора $\{x_j\}_{j=1}^n$ элементов пространства X выполнено неравенство $\min\limits_{\pm}\left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n \pm x_j\right\|_X \le (1-\delta)\max\limits_j \|x_j\|_X$.

<u>Зам.</u> Комплексное банахово пространство B-выпукло тогда и только тогда, когда оно выпукло как вещественное б. п.

<u>Пример</u> Пространство c_1 не является B-выпуклым. В качестве элементов x_j можно взять элементы станд. базиса. Тогда $\left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n \pm x_j\right\|_X = 1$ при любом расстановке знаков.

<u>Зам.</u> Из примера следует, что пространство c_1 не может быть конечно-представимо в B-выпуклом пространстве. (*)

<u>Зам.</u> Пространство X B-выпукло тогда и только тогда, когда пространство X^{**} B-выпукло.

<u>Опр.</u> $\beta_n(X) = \sup\limits_{\substack{\|x_j\|\le 1\\ \forall j}} \min\limits_{\pm}\left\|\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^n \pm x_j\right\|_X$. Супремум берется по всем конечным послед-ям единичного шара.

<u>Лемма</u> [Tm1-4] $\beta_{mn}(X) \le \beta_m(X)\cdot\beta_n(X)$.

<u>Док-во:</u> Занумеруем множество $k\in[1..mn]$ индексами i и j $i\in[1..n]$, $j\in[0..m-1]$, $k = mj+i$. Пусть $\{x_{ij}\}_{\substack{i\in[1..n]\\ j\in[1..m]}}$ — последовательность элементов B_X. Существуют числа $\varepsilon_{ij}(j)$, такие что $\left\|\frac{1}{m}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\varepsilon_i(j)\,x_{ij}\right\|_X \le \beta_m(X)$ и $\varepsilon_i(j) = \pm 1$. Рассмотрим теперь элементы $\left\{\frac{1}{m}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\varepsilon_i(j)\,x_{ij}\right\}_i$ шара радиуса $\beta_m(X)$ с центром в 0

Существуют числа $\varepsilon(i)$, равные ± 1, такие что

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon(i)\left(\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon_i(j)x_{ij}\right)\right\|_X \le \beta_n(X)\beta_m(X).$$

В силу произвольности набора x_{ij}, это значит, что $\beta_{mn}(X) \le \beta_n(X)\beta_m(X)$ (т. к. сумма слева равна $\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}\varepsilon(i)\varepsilon_i(j)x_{ij} = \frac{1}{mn}\sum \pm x_{ij}$. ■

<u>Следствие</u>: банахово пространство X B-выпукло тогда и только тогда, когда $\forall n$ $\beta_n(X) \ne 1$ (с некоторого места).

<u>Теорема</u> Следующие утверждения эквивалентны.

а) Пространство X B-выпукло

б) Пространство X не содержит ℓ_1^n равном. по n

в) ℓ_1 не конечно представимо в пространстве X.

<u>Д-во</u>: а $\to$ б. Пусть X λ-содержит ℓ_1^n $\forall$ для всякого n. Зафиксируем n и какое-нибудь λ-вложение ℓ_1^n в X, $T: \ell_1^n \hookrightarrow X$, т. е. $\|T\|\,\|T^{-1}\| \le \lambda$. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ — множество ед. векторов стандартного базиса в пространстве ℓ_1^n, а $x_j = Te_j$, $j=1,2,\dots,n$. В таком случае, $\max\|x_j\|_X \le \|T\|$, а

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\pm x_j\right\|_X \ge \|T^{-1}\|^{-1}\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\pm e_j\right\|_{\ell_1^n} = \|T^{-1}\|^{-1}.$$ То есть,

$$\max_{j=1,2,\dots,n}\|x_j\|_X \le \lambda\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\pm x_j\right\|_X,$$ в частности, $\beta_n(X) \ge \lambda^{-1}$.

По лемме [mult] это означает, что $\beta_n(X) = 1$ и X не B-вып.

б $\to$ в есть очевидность

в $\to$ а Пусть X не B-выпукло, тогда по лемме [mult] $\beta_n(X) = 1$ с нек. места. ~~Покажу~~ Достаточно показать, что X содержит копии ℓ_1^n равном. по n. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ таковы, что

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\pm x_j\right\|_X = \max\|x_j\|_X.$$ В таком случае, $\left\|\sum_{j=1}^{n}a_j x_j\right\|_X = \sum|a_j|\max\|x_j\|_X$.

Действительно, нетрудно видеть, что все $\|x_j\|$ в этом случае равны (т. к. $\left\|\frac{1}{n}\sum^{n} x_j\right\| \le \sum\|x_j\|_X$) и $\left\|\sum^{n} a_j x_j\right\| \to \sum|a_j|\max\|x_j\|_X$

С другой стороны, $\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\|_X \geq \|\sum_{j=1}^{n} \operatorname{sign} a_j \cdot x_j\|_X - \|\sum_{j=1}^{n} (\operatorname{sign} a_j - a_j) x_j\|_X =$

$= n \max \|x_j\| - \|\sum_{j=1}^{n} (\operatorname{sign} a_j - a_j) x_j\|_X \geq n \max \|x_j\| - \sum_{j=1}^{n} (1 - a_j) \cdot \max \|x_j\|_X =$

$= \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \max \|x_j\|$ (мы считаем что $\forall j \ |a_j| \leq 1$). Но это равенство и означает, что отображение $\ell_1^n \supset e_j \xleftrightarrow{I} x_j$ есть изоморфизм на образ. Но любое подпространство ℓ_1 можно приблизить подпространством ℓ_1^n.

<u>Следствие</u> Банахово пространство X B-выпукло тогда и только тогда, когда X^* B-выпукло.

<u>Д-во</u>: Мы будем рассуждать от противного, пусть X не B-выпукло, покажем, что X^* тоже не выпукло. Отметим, что пространство ℓ_∞ содержит изометрическую копию любого конечномерного банахова пространства. Значит, для всякого n существует $N(n)$, т.ч. ℓ_∞^N содержит 2-копию ℓ_1^n. Пусть $E \subset X$ есть 2-копия ℓ_1^N (такое есть по пред. теор.), тогда есть естественная проекция $\pi: X^* \to E^*$. Пусть G есть 2-копия ℓ_1^n в E^*,

$X^* \to E^* \supset G$, $G \cong \ell_1^n$. Воспользуемся проективностью пространства ℓ_1^n: существует оператор $S: \ell_1^n \to X^*$ нормы ~~не более~~ 4, т.ч. диаграмма

$$\begin{tikzcd} X^* \arrow[r] & E^* & G \arrow[l, hook'] \\ \ell_1^n \arrow[u, "S"] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

коммут.

Нетрудно видеть что $\|S^{-1}\| = 1$, то есть, $S\ell_1^n$ есть 4-копия ℓ_1^n. Так как n произвольно, это значит, что X^* не B-выпукло. То есть, если X^* B-выпукло, то и X B-выпукло.

Обратное просто: если X B-выпукло, то и X^{**} B-выпукло, следовательно, и X^* B-выпукло.

II. Тип и котип банахова пространства.

Напомним неравенство Хинчина. Символом r_k обозначается k-я функция Радемахера.

$$\left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2\right)^{1/2} \asymp \left(\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{N} r_j(t)\, x_j\right|^p dt\right)^{1/p},$$ для всякого $p \in (0,\infty)$,

независимо от N. В частности, это означает, что $\mathrm{span}(\{r_k\})$, как подпространство пространства L_p, изоморфно ℓ_2.

<u>Th (Неравенство Кахана)</u>. Для всяких чисел p и q, $p,q \in (0,\infty)$, существует константа $C_{p,q}$, такая что для всякого банахова пространства X верно неравенство

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{N} r_j(t)\cdot x_j\right\|_X^p dt\right)^{1/p} \le C_{p,q} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{N} r_j(t)\cdot x_j\right\|_X^q dt\right)^{1/q}.$$

Константа $C_{p,q}$ не зависит от числа N и выбора элементов $x_j \in X$.

<u>Опр.</u> Символом $\mathrm{Rad}(X)$ обозначим подпространство пространства $L_2(X)$, порожденное функциями вида $r_k(t)\cdot a$, $a \in X$.

<u>Опр.</u> Будем говорить, что банахово пространство X имеет тип p, если для всякого набора $\{x_j\}_j$ элементов X выполнено неравенство $\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{N} r_j(t)\, x_j\right\|_X^2 dt\right)^{1/2} \lesssim \left(\sum_{j=1}^{N} \|x_j\|_X^p\right)^{1/p}$.

Иными словами, б. п. X имеет тип p, если отображение $\{x_j\}_j \longmapsto \sum r_j x_j$ непрерывно как отображение из $\ell_p(X)$ в $L_2(X)$.

Банахово пространство имеет котип q, если выполнено обратное неравенство $\left(\sum_{j=1}^{N} \|x_j\|_X^q\right)^{1/q} \lesssim \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{N} r_j(t)\, x_j\right\|_X^2 dt\right)^{1/2}$.

Иными словами, банахово пространство X имеет котип q, если отображение $\{x_j\}_j \longmapsto \sum r_j x_j$ открыто, как отображение из $\ell_q(X)$ в $\mathrm{Rad}(X)$.

Зам. а) Банахово пространство не может иметь типа >2 и котипа <2. Действительно, если все векторы x_j проиррациональны, то $\left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^N r_j(t)x_j\|_X^2\,dt\right)^{1/2} \asymp \left(\sum \|x_j\|_X^2\right)^{1/2}$ по нер-ву Хинчина.

б) Любое б. п. X имеет тип 1 и котип ∞. Действительно,

$$\left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^N r_j(t)x_j\|_X^2\,dt\right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^N \|x_j\|_X\right)^2 dt\right)^{1/2} = \sum_{j=1}^N \|x_j\|_X \text{ и}$$

$$\cancel{\left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^N r_j(t)x_j\|_X^2\,dt\right)^{1/2} \ge \sup_{\tilde{x}\in B_{X^*}} \int_0^1 \left(\langle \tilde{x}, \sum_{j=1}^N r_j(t)x_j\rangle\right)^2 dt =}$$

$$\cancel{\ne \sup_{\tilde{x}\in B_{X^*}} \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^N |\langle \tilde{x}, x_j\rangle|\right)^2 dt = \sup_{\tilde{x}} \int_0^1 \langle \sum_{j=1}^N x_j, \tilde{x}\rangle^2 dt \ge \max \|x_j\|_X}$$

$$\int_0^1 \|\sum_{j=1}^N r_j(t)x_j\|_X\,dt \ge \int_0^1 \langle r_j(t)\tilde{x}_j, \sum_{j=1}^N r_j(t)x_j\rangle dt = \langle \tilde{x}_j, x_j\rangle = \|x_j\|,$$

где $\tilde{x}_j$ – максимизир. функционал для x_j.

Утв. ℓ_p имеет тип $\min(p,2)$ и котип $\max(p,2)$, если $p<\infty$. ℓ_∞ имеет тип 1 и котип ∞.

Д.-во: Вторая часть следует из первой, т. к. ℓ_∞ содержит все конечномерные пространства. Докажем первую половину утверждения. Во-первых, часть неравенства с функциями Радемахера можно переписать как

$$\left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^N r_j(t)x_j\|_{\ell_r}^r\,dt\right)^{1/r} = \left(\int_0^1 \sum_{k=1}^\infty \left|\sum_{j=1}^N r_j(t)(x_j)_k\right|^r dt\right)^{1/r} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^\infty \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^N r_j(t)(x_j)_k\right|^r dt\right)^{1/r} \overset{\text{Хинчин}}{\asymp} \left(\sum_{k=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^N |(x_j)_k|^2\right)^{r/2}\right)^{1/r}.$$

Если $r<2$, то эта величина не превосходит $\left(\sum_{j=1}^N \|x_j\|_{\ell_r}^r\right)^{1/r}$, и она не менее $\left(\sum_{j=1}^N \|x_j\|_{\ell_r}^2\right)^{1/r}$.

Зам. Выбирая в качестве $\{x_j, y_j\}$ базисную последовательность, можно легко убедиться, что эти неравенства точны (т. е. что β_n и σ_n не могут быть больше и меньше соответственно).

Из этого замечания следует, что пространство, содержащее копии ℓ_1^n равномерно, не может иметь β_n или σ_n больше единицы.

Опр. Будем говорить, что пространство имеет нетривиальный тип, если его β_n больше единицы.

Утв. Пространства нетривиального типа B-выпуклы.

Д-во: Такие пр-ва не содержат равномерных копий ℓ_1^n, поэтому B-выпуклы.

III B-выпуклые пространства имеют нетривиальный тип.

Опр. Пусть X - банахово пространство. Введем ещё два (в дополнение к β_n) модуля выпуклости.

$\sigma_n(X)$ есть наим. число, т. ч. $\left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(t)x_j\|_X^2\,dt\right)^{1/2} \le \sigma\, n \max_{j=1}^n \|x_j\|_X$ для всех ~~конечных~~ последовательностей $\{x_j, y_j\}$ длины n

$\tau_n(X)$ есть наим. число, т. ч. $\left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(t)x_j\|_X^2\,dt\right)^{1/2} \le \tau\, n^{1/2}\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|_X^2\right)^{1/2}$.

Утв.: а) $\beta_n \le \sigma_n \le \tau_n \le 1$

б) $n^{-1/2} \le \tau_n$

в) $\tau_{mn} \le \tau_m \tau_n$.

Д-во: а) $\left(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(t)x_j\|_X^2\,dt\right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 \left(\beta_n(X)\, n \max_{j=1}^n \|x_j\|_X\right)^2 dt\right)^{1/2} = \beta_n(X)\cdot n \cdot \max_{j=1}^n \|x_j\|_X$,

т. е. $\beta_n \le \sigma_n$.

$$n^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_X^2\right)^{1/2} \le n^{1/2}\left(n\max_{j=1}^{n}\|x_j\|_X^2\right)^{1/2} = n\cdot\max_{j=1}^{n}\|x_j\|_X, \text{ т.е. } \theta_n \le \tau_n.$$

$$\left(\int_0^1\Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\,x_j\Big\|_X^2\,dt\right)^{1/2} \le \left(\int_0^1\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_X\right)^2 dt\right)^{1/2} = \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_X \le n^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_X^2\right)^{1/2},$$

т.е. $\tau_n \le 1$.

б) Пусть все векторы x_j есть кратные некоторого вектора x. Тогда, по неравенству ~~Хинчина~~ орт. $r_n(t)$, $\left(\int_0^1\Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\Big\|_X^2\,dt\right)^{1/2} =$

$= \left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_X^2\right)^{1/2}$, т.е. $\tau_n \ge n^{-1/2}$.

в) Доказательство этого утверждения, по сути, ~~очень~~ повторяет доказательство неравенства $\beta_{mn} \le \beta_m\beta_n$. Надо лишь заметить, что

$$\left(\int_0^1\Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)x_j\Big\|_X^2\,dt\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2^n}\sum_{\pm}\Big\|\sum_{j=1}^{n}\pm x_j\Big\|_X^2\right)^{1/2},$$ где сумма справа берется по всем расстановкам знаков $\pm$ в наборе $x_1, x_2, \dots, x_n$.

<u>Теорема</u> Если один из параметров β_n, σ_n и τ_n равен единице, то и все они равны единице.

<u>Д-во</u>: Ввиду первого пункта предыдущего утверждения, достаточно доказать, что если $\tau_n = 1$, то и $\theta_n = 1$ и если $\sigma_n = \tau_n = 1$, то $\beta_n = 1$.

Пусть $\tau_n = 1$. Это значит, что для всякого числа $\delta > 0$ существуют $x_1, x_2, \dots, x_n \in B_X$, такие что

$$\left(\int_0^1\Big\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t)\,x_j\Big\|_X^2\,dt\right)^{1/2} \ge (1-\delta)\,n^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_X^2\right)^{1/2}.$$

В частности (это следует из док-ва факта $\tau_n \le 1$),

$\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_X \ge (1-\delta)\,n^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|_X^2\right)^{1/2}$. Пусть $a = \max_{j=1,2,\dots,n}\|x_j\|_X$. Не умаляя общ. [illegible] $a = \|x_1\|$. Тогда $c = \sum_{j=2}^{n-1}\|x_j\|$, $b = \sum_{j=2}^{n-1}\|x_j\|$

В таком случае,

$$(c+a)^2 \geq (1-\delta)^2 n (b+a^2).$$ По неравенству КБШ, $c^2 \leq b(n-1)$, т. е.

$$c^2+2ac+a^2 \geq (1-\delta)^2 \frac{n}{n-1} c^2 + (1-\delta)^2 n a^2, \text{ или } \quad a^2((1-\delta)^2 n - 1) - 2ac + \left((1-\delta)^2 \frac{n}{n-1} - 1\right) c^2 \leq 0.$$

~~Покажем, что $a \leq \frac{c}{n-1}(1+$~~ В случае $\delta = 0$ это неравенство влечёт $a = \frac{c}{n-1}$. Ясно, что если δ мало, то из непрерывности, это неравенство влечёт $a \leq \frac{c}{n-1} + \varepsilon(\delta)$, где $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

То есть $n \max\limits_{j=1}^{n} \|x_j\|_X \leq \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \|x_j\|_X\right)(1+\varepsilon'(\delta))$, откуда следует, что

$$n^{1/2} \max_{j=1}^{n} \|x_j\|_X \leq (1+\varepsilon'(\delta))^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_X^2\right)^{1/2}.$$ Посмотрев в доказательство факта ~~для~~ $\sigma_n \leq \tau_n$, видим, что

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right\|_X^2 dt\right)^{1/2} \geq (1-\delta)(1+\varepsilon'(\delta))^{-1/2} \cdot n^{1/2} \max_{j=1}^{n} \|x_j\|_X.$$

Устремляя δ к нулю, получаем $\sigma_n = 1$.

Пусть теперь $\sigma_n = \tau_n = 1$. Для всякого числа $\delta > 0$ найдутся векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$, такие что

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right\|_X^2 dt\right)^{1/2} \geq (1-\delta)\, n \max_{j=1}^{n} \|x_j\|_X.$$

Пусть в точке t_0 выражение $\left\|\sum\limits_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right\|_X$ достигает своего минимума, ~~пусть этот минимум т.е.~~ чисел в. ~~Из~~ Тогда указанная сумма равна по норме в ~~на~~ множестве t мера хотя бы 2^{-n}. Напишем оценку:

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{n} r_j(t) x_j\right\|_X^2 dt \leq \frac{2^n-1}{2^n} n \max_{j=1}^{n} \|x_j\|_X^2 + \frac{1}{2^n} b^2,$$ получим нер-во:

$$(1-\delta) n \max_{j=1}^{n} \|x_j\|_X^2 \leq \left(\frac{2^n-1}{2^n}\left(n \cdot \max_{j=1}^{n} \|x_j\|_X\right)^2 + \frac{1}{2^n} b^2\right)^{1/2}$$

$$(1-\delta)^2 \cdot n^2 \cdot \max_{j=1}^{n} \|x_j\|_X^2 \leq \frac{2^n-1}{2^n} \cdot n^2 \cdot \max_{j=1}^{n} \|x_j\|_X^2 + \frac{1}{2^n} b^2 \Rightarrow b \geq n \cdot \max_{j=1}^{n} \|x_j\|_X \left((1-\delta)^2 2^n - 2^n + 1\right)^{1/2}$$

То есть, $\min_{\pm} \left\| \sum_{j=1}^{n} \pm x_j \right\|_X \geq n \cdot \max_{j=1}^{n} \|x_j\|_X \cdot (1-\varepsilon(\delta))$, где $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Стало быть, $\beta_n(X) = 1$. ■

<u>Теорема</u> Банахово пространство X B-выпукло тогда и только тогда, когда оно имеет нетривиальный тип.

<u>Док-во</u>: Если X имеет нетривиальный тип, то оно не содержит равномерно по n копий ℓ_1^n. Тогда, по основной теореме главы I, X B-выпукло. Докажем обратное утверждение.

Если X B-выпукло, то для некоторого n верно $\beta_n < 1$. По предыдущей теореме, $\tau_n < 1$ тоже. По второму куску первого утверждения этой главы, $\tau_n \lesssim n^{-\varepsilon}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Покажем, что для некоторого числа $p > 1$, $p \cdot \varepsilon < 1$, верно неравенство

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{N} r_j(t) x_j \right\|_X^2 dt \right)^{1/2} \lesssim \left(\sum_{j=1}^{N} \|x_j\|_X^p \right)^{1/p}, \text{ независимо от } N.$$

Разобьём множество $[1..N]$ на множества E_k:

$$E_k = \{ j \in [1..N] \mid \|x_j\|_X \in [2^{-k}, 2^{-k+1}) \}.$$

Не умаляя общности, можем считать, что множества E_k, $k < 0$, пусты. В таком случае,

$$\left(\sum_{j=1}^{N} \|x_j\|_X^p \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k>0} |E_k| \cdot 2^{-kp} \right)^{1/p} \text{ и } \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{N} r_j(t) x_j \right\|_X^2 dt \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sum_{k>0} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{j \in E_k} r_j(t) x_j \right\|_X^2 dt \right)^{1/2} \leq \sum_{k>0} \tau_{|E_k|} |E_k|^{1/2} \left(\sum_{j \in E_k} \|x_j\|_X^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sum_{k>0} |E_k|^{1/2-\varepsilon} |E_k|^{1/2} \cdot 2^{-k+1} \lesssim \sum_{k>0} |E_k|^{1-\varepsilon} 2^{-k}.$$

Требуемое неравенство теперь следует из неравенства Гёльдера:

$$\sum_{k>0} |E_k|^{1-\varepsilon} 2^{-k} \leq \left(\sum_{k>0} |E_k|^{(1-\varepsilon)q} 2^{-(1-\delta)kq} \right)^{1/q} \left(\sum_{k>0} 2^{-\delta q' k} \right)^{1/q'} \lesssim \left(\sum_{k>0} |E_k| 2^{-k(1-\delta)q} \right)^{1/q},$$

Будем рассуждать так: предположим, что $\left(\sum_{j=1}^{N}\|x_j\|_X^p\right)^{1/p} \le 1$.

В таком случае, $\sum |E_k| 2^{-kp} \le 1$ и мы получим, что

$$\left(\int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^{N} r_j(t)\, x_j \Big\|_X^2 dt\right)^{1/2} \le 1$$ (отметим, что наше предположение $\|x_j\|_X \le 1$ также осталось в силе).

IV Теория полугрупп операторов (по книге К. Иосида „Функциональный анализ").

<u>Опр</u> Пусть $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ – семейство операторов (линейных непрерывных) в банаховом пространстве X. Семейство $\{S_t\}_t$ назовём полугруппой сжатий, если выполнены четыре нижеперечисленных условия

а) $S_{t+s} = S_t S_s$, $t, s \in \mathbb{R}_+$, (полугрупповое свойство)

б) $S_0 = id_X$,

в) $\forall\, x \in X$ $S_t x \xrightarrow[X]{} x$, $t \to 0$ (сильная непрерывность),

г) $\|S_t\| \le 1$, $t \in \mathbb{R}_+$ (ограниченность).

<u>Пример</u>: а) Пусть $X = L_p(\mathbb{R}_n)$, $p < \infty$, S_t = сдвиг на t.

б) Умножение на функцию $e^{i\varphi t}$, $\|\varphi\|_{L_\infty} \le 1$, $\varphi \ne 0$ п. в. в пространствах L_p, $p \in [1, \infty]$.

<u>Опр.</u> Пусть $\{S_t\}_t$ – полугруппа сжатий. Её инфинитезимальным производящим оператором назовём оператор A, заданный по формуле $\operatorname{sc-lim}_{h\to 0} \frac{S_h x - x}{h}$ (сильный предел) на множестве $D(A)$ существования этого предела.

<u>Лемма</u> Множество $D(A)$ плотно в пространстве X, ~~A – замкнутый оператор~~.

<u>Доказательство</u>: Рассмотрим семейство операторов $L_\lambda[S]: X \to X$, заданных по правилу $L_\lambda[S](x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} S_s x\, ds$, интеграл понимается

в смысле Римана, при $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Нетрудно видеть, что операторы $L_\lambda[S]$ линейны и непрерывны. Для того, чтобы доказать лемму, достаточно проверить два утверждения:

а) $L_\lambda[S]x \in D(A)$ б) $\forall x \quad \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda L_\lambda[S]x = x$.

а) Проверим существование предела

$$\lim_{h\to 0} \frac{S_h \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S_s x\, ds - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S_s x\, ds}{h}.$$

Перепишем первое слагаемое:

$$S_h \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S_s x\, ds = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S_{s+h} x\, ds = e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda s} S_s x\, ds = e^{\lambda h}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S_s x\, ds - \int_0^h e^{-\lambda s} S_s x\, ds\right].$$

Отсюда видно, что предел равен

$$\lim_{h\to 0} \frac{(e^{\lambda h}-1)}{h} L_\lambda[S](x) - \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda s} S_s x\, ds = \lambda L_\lambda[S](x) - x,$$ т.к. функция $s \longmapsto e^{-\lambda s} S_s x$ непрерывна в нуле. То есть,

(*) $A L_\lambda[S](x) = \lambda L_\lambda[S](x) - x$ для всякого $x \in X$.

б) Надо показать, что $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} S_s x\, d\lambda s \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} x$. Это следует из того, что функция $s \longmapsto S_s x$ ограничена, непрерывна в нуле, а семейство функций $t \longmapsto \lambda e^{-\lambda t}$ образуют аппроксимативную единицу. ∎

Зам. Формула (*) гласит, что резольвента оператора A определена на множестве $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и равна $-L_\lambda[S]$ в точке λ.

Лемма Операторы A и S_t коммутируют, на множестве $D(A)$ выполнено равенство $AS_t A x = \frac{d}{dt} S_t x$ (т.е. функция справа дифференцируема)

Доказательство: Во-первых, $\frac{d}{dt} S_t x = \lim\limits_{h\to 0} \frac{S_{t+h}x - S_t x}{h} = S_t \lim\limits_{h\to 0} \frac{S_h x - x}{h}$.

Отсюда следует, что правая производная функции S_t совпадает с $S_t A$ (и автоматически AS_t). Утверждение леммы непре

следует из того простого факта, что если функция на полуоси дифференцируема справа и эта производная непрерывна, то функция дифференцируема. Доказательство этого утверждения мы опускаем.

Зам.(*) $D(A) = \operatorname{Im} R(\lambda; A)$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. В частности, A – замкнутый оператор.

Д.-во: Мы знаем, что $D(A) \supset \operatorname{Im} L_\lambda[S] = \operatorname{Im} R(\lambda; A)$.

Пусть $Ax = y$, тогда $(A - \lambda I)x = y - \lambda x$ и $x \in \operatorname{Im}(R(\lambda; A))$. Докажем замкнутость оператора A: Пусть $x_n \to x$, а $Ax_n \to y$. В таком случае, $(A - I)x_n \longrightarrow y - x$.

Согласно непрерывности оператора $R(1; A)$, $x_n \longrightarrow R(1; A)(y - x)$, т.е. $x = R(1; A)(y - x)$. То есть, $x \in D(A)$ и $y = Ax$ ∎

Пример: а) В случае $X = L_p(\mathbb{R})$, S_t = сдвиг на t. В этом случае, оператор A есть дифференцирование, а его область определения – пространство Соболева $W_p^1(\mathbb{R})$

б) В случае $X = L_p(\mathbb{R})$, $S_t =: |\varphi|^t$, $\|\varphi\|_{L_\infty} \le 1$ и $\varphi \ne 0$ п.в., оператор A есть умножение на функцию $\ln|\varphi|$. Его область определения — $L_p(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, |\ln|\varphi||^{-p})$.

Лемма Пусть $\{S_t\}_+$ и $\{\tilde{S}_t\}_+$ – две полугруппы сжатий. Пусть A и $\hat{A}$ – их инфинитезимальные производящие операторы (соответственно). Если $\hat{A}$ является расширением A, то $\{S_t\} = \{\tilde{S}_t\}$.

Доказательство: Покажем сначала, что $D(\hat{A}) = D(A)$ (т.е. $A = \hat{A}$).

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ таково, что $\operatorname{Re}\lambda > 0$. В таком случае, $D(A) = \operatorname{Im} R(\lambda; A)$, $D(\hat{A}) = \operatorname{Im} R(\lambda; \hat{A})$. Пусть $x \in X$ – произвольный вектор. Достаточно показать, что $R(\lambda, A)x = R(\lambda, \hat{A})x$. Первый из векторов лежит в

(*): Это утв. является частным случаем того факта, что если резольвентное множество оператора A непусто то A – замкнут

множестве $D(A)$, стало быть, в множестве $D(\tilde{A})$.
То есть, $(\tilde{A}-\lambda I)R(A\lambda;A)x = (\tilde{A}-\lambda I)R(\lambda;\tilde{A})x = x$. Но оператор $\tilde{A}-\lambda I$ инъективен, стало быть, $R(\lambda;A)=R(\lambda;\tilde{A})$.

Достаточно показать, что $\forall x,y\in X, y\in X^*$ функции f и $\tilde{f}$, $f(s)=\langle S_s x,y\rangle$ и $\tilde{f}(s)=\langle \tilde{S}_s x,y\rangle$, совпадают. Воспользовавшись формулой, видим, что при $\operatorname{Re}\lambda>0$ величины $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,dt$ и $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\tilde{f}(t)\,dt$ совпадают. Выбрав $\lambda = 1+2\pi i\xi$, $\xi\in\mathbb{R}$, получаем, что $\hat{g}$ и $\hat{\tilde{g}}$ совпадают, где $g(t)=\chi_{\mathbb{R}_+}\cdot e^{-t}f(t)$ и $\tilde{g}(t)=\chi_{\mathbb{R}_+}e^{-t}\tilde{f}(t)$. По теореме Планшереля, $g=\tilde{g}$ п.в., отсюда следует, что $f=\tilde{f}$ всюду (т.к. эти функции непрерывны) ∎

V Теорема Като-Бёрлинга

(по книге Миллман, Цветкович „Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces")

<u>Опр.</u> Семейство операторов $\{S_z\}$, $z\in\{\zeta\in\mathbb{C} \mid |\arg\zeta|<\alpha\}=V_\alpha$ на банаховом пространстве X называется аналитической полугруппой, если выполнены свойства, перечисленные ниже.

а) $\forall z_1, z_2\in V_\alpha$ $S_{z_1}S_{z_2}=S_{z_1+z_2}$,

б) $S_0 = id_X$

в) $\forall x,y\in X, y\in X^*$ функция $z\longmapsto\langle S_z x,y\rangle$ голоморфна в V_α.

Оказывается, что широкий класс полугрупп сжатий можно продолжить до аналитических полугрупп.

<u>Th</u> (Бёрлинг - Като).

Пусть $\{S_t\}_t$ – полугруппа сжатий. Пусть $\rho\in\mathbb{R}$ таково, что $0<\rho<2$ и для всякого t $\|S_t - id_X\|_{\mathcal{L}(X,X)}\le\rho$. В таком случае, $\{S_t\}_t$ можно продолжить до аналитической полугруппы в некотором угле V_α, причём α зависит лишь от параметра ρ, кроме того, $\|S_z\|_{\mathcal{L}(X,X)}\le K(\rho)$.

Зам. Более общую теорему об аналитических полугруппах читатель может найти в книге К. Иосиды „Функциональный анализ".

Лемма Пусть S_t – ~~не~~ полугруппа сжатий, удовлетворяющая условию $\|S_t - id\| \le \rho_0 < 2$, для всякого t. Тогда точка $1-\beta$ принадлежит резольвентному множеству S_t оператора S_t (для всякого t) и имеет место оценка $\|R(S_t; 1-\beta)\| \le \frac{M(\rho)}{\beta}$, если $\beta \ge \rho_0$.

Доказательство: Запишем $S_t - (1-\beta)I = \beta\left(\frac{S_t - I}{\beta} + I\right)$. В таком случае, $R(S_t; 1-\beta) = \frac{1}{\beta}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{S_t - I}{\beta}\right)^j$, ряд сходится, так как $\left\|\frac{S_t - I}{\beta}\right\| \le \frac{\rho_0}{\beta} < 1$. Кроме того, $\|R(S_t; 1-\beta)\| \le \frac{1}{\beta}\sum\left(\frac{\rho_0}{\beta}\right)^j \le \frac{1}{\beta}\sum\left(\frac{\rho_0}{\beta}\right)^j =$

$= \frac{1}{\beta}\frac{1}{1-\frac{\rho_0}{\beta}} = \frac{1}{\beta}\cdot M(\rho)$ ∎

Лемма Пусть $\{S_t\}_t$ – полугруппа сжатий, удовлетворяющая условию $\|S_t - id\| < \rho_0 < \rho < 2$, ~~в~~ а A – её производящий инфинитезимальный оператор. В таком случае, существует число $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$, зависящее лишь от числа ρ_0, ~~такое что полугруппа $\{S_t\}_t$ может быть продолжена до аналитической полуг~~ такое что если $|\arg z - \pi| \ge \theta$, то z принадлежит резольвентному множеству оператора A и $\|R(A, z)\| \le \frac{M(\rho)}{|z|}$.

Доказательство: Если $\arg z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, то z принадлежит рез. множеству согласно результатам предыдущей главы (и дополнительное предположение $\|S_t - id\| < \rho$ не нужно). Оценка в этом случае следует из формулы предыдущей главы.

Поэтому пусть $\arg z \notin (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Пусть $x \in D(A)$, тогда

$$(e^{-zt}S_t - id)x = \int_0^t e^{-zs}\frac{d}{ds}(e^{-zs}S_s)x\,ds = (A - z\,id)\int_0^t e^{-zs}S_s x\,ds. \quad (*)$$

Пусть теперь $t = \frac{\pi}{\operatorname{Im} z}$. Тогда число e^{-zt} вещественно и

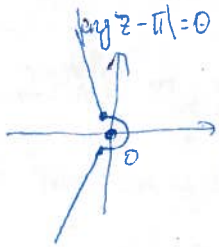
отрицательно. Мы хотим воспользоваться предыдущей леммой, положим $(1-\beta)^{-1} = e^{-zt}$. Тогда $\beta = e^{\frac{\operatorname{Re} z \cdot \pi}{\operatorname{Im} z}} + 1$. Если $|\arg z - \pi| > \theta(\rho)$, то $\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} \cdot \pi > \ln(\rho - 1)$ и $\beta > \rho$. В таком случае, согласно предыдущей лемме, оператор $(e^{-zt} S_t - id)$ обладает непрерывным обратным (норма которого не превосходит $e^{\operatorname{Re} z t} \cdot c(\theta)$). То есть, z принадлежит резольвентному множеству оператора A и

$$\|R(A;z)\| \le \left| e^{\operatorname{Re} z \cdot t} \cdot \int_0^t e^{-\operatorname{Re} z \cdot s} ds \right| = \left| e^{\operatorname{Re} z t} \cdot \frac{1}{\operatorname{Re} z} \left(e^{-\operatorname{Re} z \cdot t} - 1 \right) \right| \le$$

$$\le t = \frac{\pi}{\operatorname{Im} z} \lesssim \frac{1}{|z|}, \text{ т. к. } \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \blacksquare$$

Пусть $|\arg \xi| < \frac{1}{2}\theta(\rho)$, где $\theta(\rho)$ получено в предыдущей лемме. В таком случае, зададим семейство операторов $\{T_\xi\}_{|\arg \xi| < \frac{\theta(\rho)}{2}}$ согласно формуле

$$T_\xi = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{z\xi} R(A, z)\, dz,$$ где контур Γ есть



,

радиус кругового сектора равен единице. Благодаря предыдущей лемме, такое задание корректно, кроме того, интеграл сходится равномерно по ξ в области $|\arg \xi| < \frac{\theta(\rho)}{2}$, $|\xi| > \varepsilon$, для всех $\varepsilon > 0$.

<u>Утв.</u> T_ξ есть аналитическая полугруппа операторов.

<u>Д-во</u>: Аналитичность очевидна, надо проверить полугрупповое свойство и непрерывность в нуле. Пусть Γ' – сдвиг контура Γ на 2 направо. Тогда

$$T_{\xi'} T_\xi = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} e^{z\xi + \hat{z}\xi'} R(A, z) R(A, \hat{z})\, dz\, d\hat{z}.$$ Пользуясь тождеством

Гильберта для резольвенты, запишем:

$$T_{\xi'} T_{\xi} = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma} e^{z\xi-\tilde z\xi'} \frac{R(A,z)}{z-\tilde z}\, dz\, d\tilde z + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma} e^{z\xi-\tilde z\xi'} \frac{R(A;\tilde z)}{z-\tilde z}\, dz\, d\tilde z.$$

Согласно формуле вычетов, $\int_{\Gamma'} \frac{e^{\tilde z\xi'} d\tilde z}{z-\tilde z} = -2\pi i\, e^{z\xi'}$ и

$\int_{\Gamma} \frac{e^{z\xi}\, dz}{z-\tilde z} = 0$. То есть, $T_{\xi'} T_{\xi} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{z(\xi+\xi')} R(A,z)\, dz = T_{\xi'+\xi}$.

Для проверки непрерывности в нуле зафиксируем $x \in X$ и будем более подробно анализировать формулу (*). Пусть $z \in \Gamma$, тогда $R(A;z)x = -\frac{x}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$. Действительно, согласно формуле (*), $R(A;z)x = e^{zt} R(S_t, e^{-zt}) \int_0^t e^{-zs} S_s x\, ds$, где $t = \frac{\pi}{\operatorname{Im} z}$. Отметим, что величина e^{-zt} постоянна, когда $z \to \infty$ по одному из лучей контура Γ.

Согласно непрерывности полугруппы $\{S_s\}_s$, $S_s x = x + o(1)$, то есть, $R(A;z)x = e^{zt} R(S_t, e^{-zt})x \cdot \left(-\frac{1}{z}\cdot(e^{-zt}-1)\right) + o\left(\frac{1}{z}\right)$. Остается доказать соотношение $e^{zt} R(S_t, e^{zt})\cdot(e^{-zt}-1)x \to x$, или $R(S_t, 1-\beta)(1-(1-\beta))x \to x$. Но это следует из непрерывности $\{S_t\}_t$ в вкусе). Таким образом, $R(A;z) = -\frac{x}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)$. Покажем теперь, что $T_\xi x \xrightarrow[\xi\to 0]{} x$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Пусть $|\xi|$ мал настолько, что в формуле для резольвенты $o\left(\frac{1}{z}\right) \le \frac{\varepsilon}{|z|}$, если $|z| > \frac{1}{|\xi|}$. Покажем, что тогда $\|T_\xi x - x\| \le C\varepsilon$, где C — некоторая абсолютная константа. Для этого в определении T_ξ заменим контур Γ контуром Γ_ξ, который есть растяжение контура Γ в $|\xi|^{-1}$ раз.

В таком случае, $T_\xi x = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\xi} e^{\xi z} R(A,z)x\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\xi} e^{\xi z}\left(-\frac{x}{z}+o\left(\frac{1}{z}\right)\right)dz =$

$= x + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\xi} e^{\xi z} o\left(\frac{1}{|z|}\right)|dz|$. Оценим погрешность, разбив контур интегрирования на „полукруговой" и два луча. На полукруге $|e^{\xi z}| \asymp 1$, поэтому этот интеграл $\leq \varepsilon$. На лучах возникнут интегралы вида $\varepsilon \int\limits_{|\xi|^{-1}} e^{-|\xi|\cdot\theta z}\frac{dz}{z} \leq \varepsilon$. Лемма доказана ∎

Для доказательства теоремы Хилле-Бёрлинга остаётся проверить, что при $t \in \mathbb{R}$ $T_t = S_t$. Согласно последней лемме предыдущего параграфа, для этого достаточно доказать, что инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{T_t\}_t$ есть расширение A. Пусть $x \in D(A)$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Gamma}\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)\int\limits_{\Gamma} e^{tz}R(A,z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{tz}\,zR(A,z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}(-A)\int\limits_{\Gamma} e^{tz}R(A,z)\,dz$$

То есть, $T_t = -S_t$ (мы в середине перешли знак) ∎

VI B-выпуклость и проекторы.

<u>Лемма</u> Пусть X - B-выпуклое банахово пространство. В таком случае, существует число $N \in \mathbb{N}$ и число $\delta > 0$, такие что для любых N коммутирующих проекторов $\{P_j\}_{j=1}^N$ нормы 1 имеем место неравенство

$$\left\|\prod_{j=1}^{N}(id_X - P_j)\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 2^N - \delta.$$

<u>Доказательство</u>: По определению B-выпуклости, существует число N и число $\delta > 0$, такие что для любых N векторов $\{x_j\}_{j=1}^N$ нормы не более единицы найдется расстановка знаков ε_j,

такой что $\|\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j x_j\|_X \le N-\delta$. Покажем, что исходное неравенство выполнено с теми же параметрами N и δ. ~~Раскрыв~~ Подставив вместо x_j $P_j x$, получим существование расстановки знаков ε_j, такой что $\|\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j P_j x\|_X \le N-\delta$.

Для этого запишем $\prod_{j=1}^{N}(id-P_j)x = \sum_{k=1}^{N}(-1)^k \sum_{\substack{|A|=k\\ A\subset[1..N]}} \prod_{j\in A} P_j x$.

~~Сру~~ Рассмотрим такое выражение $\prod_{j=1}^{N-1} P_j^{\chi\{\varepsilon_j \ne \varepsilon_N\}}\left(\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j P_j\right)x$.

Отметим, что это выражение является „подсуммой" предыдущего, поэтому

$$\|\prod_{j=1}^{N}(id-P_j)x\|_X \le \|\prod_{j=1}^{N-1} P_j^{\chi\{\varepsilon_j \ne \varepsilon_N\}}\left(\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j P_j\right)x\|_X + (2^N - N) \le$$

$$\le N-\delta+2^N-N = 2^N-\delta \quad \blacksquare$$

<u>Следствие</u>. Пусть X суть B-выпуклое банахово пространство. Тогда для всякого набора коммутирующих проекторов нормы 1 ~~у~~ имеет место неравенство

$\|\prod_{j=1}^{N}(id-P_j)\|_X \le M\rho^N$. Число ρ меньше 2 и зависит лишь от пространства X.

<u>Доказательство</u>. Пусть число N_0 таково, что $\|\prod_{j=1}^{N_0}(id-P_j)\|_X \le 2^{N_0}\delta$.

Тогда $\|\prod_{j=1}^{N}(id-P_j)\|_X \le \prod_{i=0}^{[\frac{N}{N_0}]-1}\|\prod_{j=1}^{N_0}(id-P_{iN_0+j})\|_X \cdot 2^{N_0} \le \rho^N \cdot 2^{N_0} \quad \blacksquare$

Пусть $P_1, P_2, \dots, P_N$ - коммутирующие проекторы, $t>0$. Рассмотрим оператор S_t, заданный согласно формуле

$$(\star)\quad S_t = \prod_{k=1}^{N}\left(P_k + e^{-t}(id-P_k)\right).$$

<u>Лемма</u> Пусть X - B-выпуклое банахово пространство, $P_1, \dots, P_N$ - набор коммутирующих проекторов нормы один на нем. Тогда для любых чисел $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$, имеет место оценка $\|\prod_{i=1}^{n}(id-S_{t_i})\| \le M\cdot\rho^n$, здесь M и ρ - абсолютные константы.

которые зависят лишь от пространства X, а операторы S_{t_j} заданы формулой (✡).

Доказательство: Пусть $\Pi_{k,j}$, $k \in [1..N]$, $j \in [1..n]$ — набор независимых случайных операторов, $\Pi_{k,j}$ есть P_k с вероятностью $(1-e^{-t_j})$ и тождественный оператор с вероятностью e^{-t_j}. В таком случае, $\mathbb{E} \prod_{k=1}^{N} \Pi_{k,j} = S_{t_j}$. С другой стороны, $\{\prod_{k=1}^{N} \Pi_{k,j}\}_{j=1}^{n}$ есть коммутирующее семейство проекторов, откуда, по первой лемме этого параграфа, $\|\prod_{j=1}^{n}(id - \prod_{k=1}^{N}\Pi_{k,j})\| \le M \cdot \rho^n$. Усредняя, получаем утверждение леммы. ■

Теорема. Пусть X — B-выпуклое банахово пространство. Существует константа M, такая что для всякого набора $\{P_j\}$ коммутирующих проекторов единичной нормы, существует эквивалентная норма $|||\cdot|||$ на пространстве X, удовлетворяющая следующим условиям.

1. $\forall x \in X \quad \|x\| \le |||x||| \le M \cdot \|x\|$
2. $\forall t > 0 \quad |||S_t||| \le 1.$
3. $\forall t > 0 \quad |||(id - S_t)||| \le \rho.$

Операторы S_t заданы формулой (✡).

Доказательство:

Зададим норму $|||\cdot|||$ по формуле

$$|||y||| = \sup\{\rho^{-m} \|\prod_{j=1}^{m}(id - S_{t_j}) \prod_{k \le n} S_{\tau_k} y\|\}.$$

Супремум берется по всем m и n и всем наборам чисел $\{t_j\}_{j=1}^{m}$, $\{\tau_k\}_{k=1}^{n}$. Из предыдущей леммы следует свойство 1., а свойства 2. и 3. очевидны. ■

Зам. Нетрудно видеть, что $\{S_t\}_t$ есть непрерывная полугруппа сжатий.

K-выпуклость и великая теорема Пизье.

Напомним, что банахово пространство X имеет тип p, если отображение $\ell_p(X) \longrightarrow \mathrm{Rad}\,X$, заданное формулой $\{x_j\} \longrightarrow \sum r_j x_j$, непрерывно. Пространство $\mathrm{Rad}\,X$ есть подпространство $L_2(X)$, можно предложить „кандидата" в проекции на $\mathrm{Rad}\,X$,

$$\pi[f] = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, r_j \rangle \cdot r_j.$$

<u>Опр.</u> Банахово пространство X называется K-выпуклым, если оператор π непрерывен.

<u>Теорема.</u> K-выпуклое пространство X не может содержать равносторонних копий ℓ_1^n.

<u>Доказательство:</u> Предположим противное, пусть $\exists\, C$, т.ч. $\forall\, k$ $\ell_1^{2^k} \xrightarrow{T} X$ обратим с константой C. Множество $[1..2^k]$ представим как $\{-1,1\}^k$ и заведем координатные функции $w_j(\omega) = j$-я координата ω, $\omega \in \{-1,1\}^k$. Рассмотрим функцию $f \in L_2(X)$, заданную по правилу

$$f(t) = T\left[\prod_{j=1}^{k} (1 + r_j(t) w_j)\right].$$

Нетрудно видеть, что $\forall\, t$ $\|f(t)\|_X \le \|T\|$, т.к.

$$\mathbb{E}_\omega \left|\prod_{j=1}^{k} (1 + r_j(t) w_j)\right| = \mathbb{E}_\omega \prod_{j=1}^{k} (1 + r_j(t) w_j) = 1.$$ С другой стороны,

$\langle r_j, f \rangle = T w_j \cdot r_j$, то есть $\pi[f] = \sum_{j=1}^{k} r_j \cdot T w_j$. Вычислим норму $\pi[f]$

$$\|\pi[f]\|_{L_2(X)} \gtrsim \|T^{-1}\| \left\| \sum_{j=1}^{k} r_j w_j \right\|_{L_2(\ell_1)} \overset{\text{т.к. } \ell_1 \text{ имеет тип } 2}{\gtrsim} \|T^{-1}\| \left(\sum_{j=1}^{k} \|w_j\|_{\ell_1}^2 \right)^{1/2} =$$

$= \|T^{-1}\| \cdot \sqrt{k}$. Противоречие

■

Таким образом, K-выпуклые пространства ~~выпу~~ B-выпуклы.

<u>Th</u> (Великая теорема Пизье) Если банахово пространство X B-выпукло, то оно и K-выпукло.

Доказательству теоремы предпошлём лемму.

<u>Лемма</u>. Если пространство X имеет типа p, то и пространство $L_2(X)$ имеет типа p.

<u>Доказательство</u>: Пусть $\{x_j(\cdot)\}$ – конечная последовательность функций из $L_2(X)$. Надо ~~доказ~~ оценить величину $\left(\int_0^1 \int_\Omega \|\sum_j r_j(t) x_j(s)\|_X^2 \, ds \, dt\right)^{1/2}$.

~~Заменим~~ Поменяем порядок интегрирования и напишем цепочку неравенств:

$$\left(\int_\Omega \int_0^1 \|\sum_j r_j(t) x_j(s)\|_X^2 \, dt \, ds\right)^{1/2} \overset{X \text{ типа } p}{\lesssim} \left(\int_\Omega \left(\sum_j \|x_j(s)\|_X^p\right)^{2/p} ds\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sum_j \left(\int_\Omega \|x_j(s)\|_X \, ds\right)^{p/2}\right)^{1/p} = \left(\sum_j \|x_j(\cdot)\|_{L_2(X)}^p\right)^{1/p}.$$ Предпоследнее неравенство следует из неравенства Минковского после возведения в степень p. ∎

<u>Доказательство теоремы Пизье</u>: Если X K-выпукло, то оно не содержит равномерных копий ℓ_1^n, а тогда, по теореме из первой главы, X B-выпукло.

Пусть X B-выпукло. Согласно результатам третьей главы, X имеет нетривиальный тип, следовательно, (по пред. лемме) $L_2(X)$ имеет нетривиальный тип, откуда следует, что $L_2(X)$ B-выпукло. Символом $L_2^n(X)$ будем обозначать подпространство $L_2(X)$, порождённое первыми n функциями Радемахера и их всевозможными произведениями. Достаточно показать, что пространства

$L_2^n(X) \ni g \longmapsto \sum_{j=0}^{n} \langle r_j, g\rangle \cdot r_j$ равномерно по n ограничены.

Рассмотрим алгебры множеств, порождённые всеми функциями Радемахера, кроме одной (r_j), и назовем их $\{\mathcal{G}_j\}$. Введем коммутирующие проекторы $P_j = \mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{G}_j)$. Они имеют норму один. Рассмотрим полугруппу $\{S_t\}_t$, заданную этими проекторами согласно формуле (✡). Пространство $L_2^n(X)$ можно переформировать так, чтобы полугруппа $\{S_t\}_t$ удовлетворяла условиям теоремы Бёрлинга-Калло. Аналитическую полугруппу обозначим тем же символом.

Разложим S_t по степеням экспоненты,

$$S_t = \prod_{j=1}^{n} P_j + e^{-t} \sum_{j=1}^{n} \prod_{k\neq j} (id - P_j) \prod_{k\neq j} P_k + e^{-2t} T_2 + \ldots + e^{-nt} T_n, \text{ где}$$

$T_2, \ldots, T_n$ – некоторые операторы, явный вид которых нам неважен.

Нетрудно видеть, что $\prod_{k\neq j} P_k \cdot (id - P_j) = \langle r_j, \cdot\rangle \cdot r_j$ на пространстве $L_2^n(X)$, эту формулу легко проверить на базисе из произведений функций Радемахера. Но теперь все легко оценить „контурным" интегрированием:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \prod_{k\neq j} P_k (id - P_j) \right\|_{L_2(X)} \leq \left\| e^{-a} \int_{-\pi}^{\pi} S_{a+ib} e^{ib} \frac{db}{2\pi} \right\| \lesssim const, \text{ где}$$

a настолько велико, что отрезок $[a - i\pi, a + i\pi]$ содержится в угле Γ_α (в котором определена полугруппа) ∎