План.

1. Некоторые общие слова, мотивирующие дальнейшее.

а) Некоторая порция теории меры.

] S - сепарабельное полное метрическое пространство.

$C_b(S)$ - пространство ограниченных непрерывных функций на S с sup-нормой. $Z(S) = (C_b(S))^*$ (пространство (зарядов) M^+ - $(C_b)^*$ подмножество, состоящее из вероятностных мер.

Зафикс. (Тф (теорема) Александрова, мер ($Z(S)$) наделяется (в ($*$ + слабой) топологии, (M^+ - его подмножество. Зам. $(C_b)^* \not\simeq Z(S)$, если S - не комп.

Зам. Если (S - компактно, то Шар $(C_b)^*$ - компактен в w^*-слабой топологии по теореме Алаоглу. Ясно, что M^+ - его замкнутое подмножество. ~~Стоит~~ Во-первых, не ясно, замкнуто ли оно. Во-вторых, нам бы хотелось секвенциальной компактности.

Топология на M^+ порождается ~~ее~~ $*$-слабой топологией $(C_b)^*$.

Оказывается, её можно задать по-другому.

Th (по-видимому, Трохоров-Колмогоров, для комп. - А.Д. Александров)

$*$-слабая топология на M^+ порождается любой из систем окрестностей.

$V_{ce}(\mu) = \{ \nu \in M^+ \mid \nu(F_i) < \mu(F_i) + \varepsilon$, ~~если~~ $F_1, F_2 \dots F_n$ - замкнутые $\}$

$V_{op}(\mu) = \{ \nu \in M^+ \mid \nu(F_i) > \mu(F_i) - \varepsilon$, ~~если~~ $F_1, \dots, F_n$ - откр. $\}$

$V_{set}(\mu) = \{ \nu \in M^+ \mid |\nu(F_i) - \mu(F_i)| < \varepsilon$, $F_1 \dots F_n$ - такова, что $\mu(\partial F_i) = 0 \}$.

Док-во: стандартно и скучно.

Решим сначала вопрос метризуемости M^+ - это позволит проверить любую из компактностей.

Def (Метрика Трохорова).] $\mu, \nu \in M_+$, тогда

$\rho(\mu, \nu) = \inf_\delta \{ \forall A \in \mathcal{B}(S) \quad \mu(A) \le \nu(A_\delta) + \delta, \ \nu(A) \le \mu(A_\delta) + \delta \}$.

Здесь $A_\delta = \{ x \in S \mid \rho(x, A) < \delta \}$.

Зам. Это метрика.

1) Если $\rho(\mu,\nu)=0$, то рассмотрим A - замкнутое.

$\mu(A) \le \nu(A_\varepsilon)+\varepsilon$ для всех ε. Тогда $\mu(A) \le \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\nu(A_\varepsilon)+\varepsilon) = \nu(A)$,

~~он~~ из симметрии, $\mu(A)=\nu(A)$. Тогда $\mu=\nu$.

2) $\exists\ \mu, \nu, \eta$ - меры.

$\mu(A) \le \nu(A_\delta)+\delta \le \eta((A_\delta)_\varepsilon)+\varepsilon+\delta$, если $\rho(\mu,\nu)\le\delta$ и $\rho(\nu,\eta)<\varepsilon$

$(A_\delta)_\varepsilon \subset A_{\delta+\varepsilon}$ (внимание, здесь нет равенства). Тогда, ~~берем~~ бер по δ и ε, получаем мер-во Δ-ка.

Th Эта метрика порождает $*$-~~по~~слабую топологию на M^+.

Д.-во: Докажем, что метрика не слабее $*$-топологии.

$\exists\ \mu$-мера, $F_1, F_2, \dots, F_n$ - замкнутые. Тогда $\exists\ \delta$, т.ч.

$\mu(F_\delta) < \mu(F_i)+\varepsilon/2$ и $\delta<\varepsilon/2$. ~~Выберем~~ Тогда шар радиуса δ в метрике ρ лежит в $V_{ce,\mu,\varepsilon}(F_1,\dots,F_n)$.

В обратную сторону сложнее. Выберем в S счётное покрытие ~~множе~~ шарами B_i радиуса меньше δ, таким что $\mu(\partial B_i)=0$. Сделаем из них борелевское покрытие (конечными пересечениями) - это свойство не нарушится. Пусть это A_i. Тогда $\exists\ n: \mu(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)>1-\delta$.

Пусть A - множество всевозможных объединений множеств ~~из~~ A_i. Рассмотрим $V_{set,\mu,\delta}(A)$, докажем, что она содержится в шаре ρ радиуса 3δ. Пусть $F\in B(S)$ ~~Тогда~~ A - объединение тех A_i, которые пересекаются с F.

Тогда ~~$\nu(F)\le\mu(F\cup A)+\varepsilon$~~ $A\subset F_\delta$, $F\subset A\cup(A)^c$.

$\nu(F)\le\nu(A\cup A^c)\le\nu(A)+\nu(A^c)\le\mu(A)+\mu(A^c)+2\delta\le$

$\le\mu(F_\delta)+3\delta$.

$\mu(F) \le \mu(A \cup A^c) \le \mu(A) \cup \mu(A^c) \le \nu(A) + \delta + \delta \le$

$\le \nu(F_\delta) + 2\delta.$

Итак, теорема доказана ☒

<u>Зам.</u> $(C_b)^*$ может быть и неметризуемо!

<u>Th</u> M^+ полно по ρ.

<u>Док.-во</u>: $\exists\ \mu_n$ - фунд. в (M^+, ρ). Рассмотрим множество A. Тогда

$\mu_m(A) \le \mu_n(A_\varepsilon) + \varepsilon$ и $\mu_n(A) \le \mu_m(A_\varepsilon) + \varepsilon$. с нек. места.

Мы хотим доказать, что (M^+, ρ) полно

<u>Th (Улам)</u> $\exists$ S-сеп. метр. пр.-во (полное), $\mu \in M^+$. Тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ K_\varepsilon$ - комп. в S, т. ч. $\mu((K_\varepsilon)^c) < \varepsilon$.

<u>Д.-во</u>: Для каждого n рассмотрим $1/n$ - покр. в S, выберем их счётными. Тогда, если это A_{in}, для всякого n выберем i_n, т. ч. $\mu(\bigcup_{i=1}^{i_n} A_{in}) > 1 - \varepsilon/2^n$. Выберем $K_\varepsilon = \bigcap_{i \ge 1} \bigcup_{i=1}^{i_n} A_{in}$. Мера K_ε больше $1-\varepsilon$, кроме того, в нём $\forall\ n$ есть конечная $1/n$ - сеть. ☒

То есть, даже в очень большом пр.-ве, мера сидит на компактах.

Заметим, что в доказательстве теоремы об эквивалентности метрики ρ и $*$-слабой топологии мы для любой меры μ и для любого ε построили произвольную меру μ и её ε-р окрестность. Пусть $\delta = \varepsilon/10$, построим, как в т.-1, конечную конечную сеть конечной системы шаров B_i радиуса $< \delta$,

что $\mu(\bigcup_{i=1}^{N} B_i) > 1-\delta$. Пусть ν - из ρ-δ окрестности μ, $\bigcup_{i=1}^{N} \tilde{B}_i$ - шары вдвое большего радиуса. Тогда

$$\nu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{N} \tilde{B}_i\right)^c\right) \le \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{N} \tilde{B}_i\right)^c_{\delta}\right) + \delta \le \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right)^c\right) + \delta \le 2\delta.$$

Стало быть, для всех ν, близких к μ, можно выбрать конечную систему шаров одновременно. Стало быть, для любого ε найдется такой ~~окрестность μ~~ ~~(можно брать $\varepsilon/10$)~~ комп. K_ε, что $\mu_n(K_\varepsilon^c) < \varepsilon$, если μ_n - фунд..

Мы готовы доказать

<u>Th</u> (M^+, ρ) полно.

<u>Док.-во</u>: $\exists$ μ_n - фунд. в (M^+, ρ). Тогда $\forall \varepsilon$ $\exists$ K_ε : $\mu_n(K_\varepsilon) > 1-\varepsilon$ для всех μ_n (потому что с некоторого места они все лежат в $\varepsilon/10$-окр. μ_n, начальные можно добавить, присовокупив их компакту к K_ε). Для доказательства полноты достаточно найти сходящуюся подпосл. μ_n.

~~Заметим, что $\mu_n|_K$.~~ Рассмотрим $\mu_{n,\varepsilon} = \mu_n|_{K_\varepsilon}$.

По теореме Алаоглу с.в. слу комп. K_ε, M^+ метр.), $\mu_{n,\varepsilon} \xrightarrow{w^*} \tilde{\mu}_\varepsilon$ - какой-то мера (невероятностная) на K_ε. Продолжим $\tilde{\mu}_\varepsilon$ на ~~K_ε~~ всё S. Ясно, что $\operatorname{supp} \tilde{\mu}_\varepsilon \subset \bigcup_{n} K_{1/n}$ (выберем $K_{1/n}$ так, чтобы они строго возрастали по включению). Кроме того, $\tilde{\mu}_{1/n}$ возрастают.

Пусть $F \in \mathcal{B}(S)$, выберем $\tilde{\mu}(F) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}_{1/n}(F)$. Предел

существует, потому что $\tilde{\mu}_{1/n}(F)$ ↑ и ограничена единицей. Ясно, что $\tilde{\mu}$ – аддитивная функция множества. Проверим её ~~непрерывность~~, счётную аддитивность, ~~для этого дост. проверить регулярность.~~

~~Надо показать, что $\forall F \in \mathcal{B}(S)$, $\tilde{\mu}(F) = \sup\{K \subset F$~~

~~$= \sup\{\tilde{\mu}(K) \mid K \subset F, K$ – комп.$\} = \inf\{\tilde{\mu}(I) \mid I$ – откр.$\}$.~~

~~$\exists F \in \mathcal{B}(S)$, пусть $\tilde{\mu}(F) = a$, $\tilde{\mu}_{1/n}(F) = a - \varepsilon$, т.е.~~

~~$\tilde{\mu}_{1/n}(F \cap K_{1/n}) = a - \varepsilon$. ~~Ясно, что $\tilde{\mu}(F \cap K_{1/n}) = a - \varepsilon$.~~~~

~~Так как $\tilde{\mu}_{1/n}$.~~ Пусть $A_1 \subset A_2 \ldots \subset A_n \subset \ldots$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n$, надо доказать, что $\tilde{\mu}(A) = \lim_n \tilde{\mu}(A_n)$. Ясно, что $\tilde{\mu}(A) \geq \lim_n \tilde{\mu}(A_n)$. $\tilde{\mu}(A) = \tilde{\mu}(A \cap K)$, кроме того,

$\lim_n \tilde{\mu}(A_n) \geq \lim_n \tilde{\mu}(A_n \cap K_{1/n})$. Пусть $\tilde{\mu}_{1/n}(A) \geq \tilde{\mu}(A) - \varepsilon$,

т.е. $\tilde{\mu}_{1/n}(A \cap K_{1/n}) > \tilde{\mu}(A) - \varepsilon$. Но $\exists$ т. т. ?

$\tilde{\mu}_{1/n}(A_m \cap K_{1/n}) > \tilde{\mu}(A) - 2\varepsilon$, а $\tilde{\mu}(A_m) > \tilde{\mu}_{1/n}(A_m)$.

Так или иначе, $\tilde{\mu}$ – мера. Докажем, что $\mu_n \xrightarrow{P} \tilde{\mu}$.

Пусть $F \in \mathcal{B}(S)$, т. ?. $\tilde{\mu}(\partial F) = 0$. Тогда $|\mu_n(F) - \tilde{\mu}(F)| \leq$

$\leq |\mu_n(F \cap K_\varepsilon) - \tilde{\mu}(F \cap K_\varepsilon)| + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon$. Теорема доказана ∎

Теперь мы готовы ~~до~~ подвести итог под этой теорией меры.

<u>Th (Трохоров)</u> Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^+$. $\mathcal{M}$ – комп. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon$ $\exists K_\varepsilon$, т. ?. $\mu(K_\varepsilon^c) < \varepsilon$ $\forall \mu \in \mathcal{M}$.

Доказательство: Достаточно построить ε-сеть для M. Рассмотрим семейство мер $\mu_{n,\varepsilon} = \mu_n|_{K_{\varepsilon/10}}$. Для него найдется $\varepsilon/10$-сеть из мер ν_n. Докажем, что это ε-сеть для μ_n. $\exists F \in \mathcal{B}(S)$

$$\mu_n(F) \le \mu_n(F \cap K_{\varepsilon/10}) + \varepsilon/10 \le \nu_n\left((F \cap K_{\varepsilon/10})_{\varepsilon/10}\right) + 2\cdot\varepsilon/10 \le$$

$$\le \nu_n\left(F_{\varepsilon/10} \cap K_{\varepsilon/10}\right) + 2\cdot\varepsilon/10 = \nu_n(F_{\varepsilon/10}) + 2\cdot\varepsilon/10$$

$$\nu_n(F) = \nu_n(F \cap K_{\varepsilon/10}) \le \mu_n\left((F_{\varepsilon/10}) \cap K_{\varepsilon/10}\right)^{+\varepsilon/10} \le \mu_n(F_{\varepsilon/10}) + \varepsilon/10.$$

В обратную сторону. Пусть μ_n – конечная $\varepsilon/10$ сеть в M. Каждая из μ_n $\varepsilon/10$-сидит на конечном множестве ~~$\varepsilon/2$-шаров~~ $\varepsilon/2$-шаров

Тогда все μ_n $\frac{\varepsilon}{10}$-сидят на конечном мн.-ве B_i шаров радиуса $\varepsilon/2$. Стало быть, для всякого $\nu \in M$

$$\nu\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{B}_i\right)^c\right) \le \mu_k\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{B}_i\right)^c_{\frac{\varepsilon}{10}}\right) + \frac{\varepsilon}{10} \le \mu_k\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)^c\right) + \frac{\varepsilon}{10} \le$$

$\le \varepsilon$. (Здесь $\tilde{B}_i$ – шары вдвое большего радиуса)

Стало быть, для всякого ε, M ε-сидит на конечном множестве ε-шаров. Выбрав $\varepsilon_k = 2^{k}$ и перескалив всё это, получаем K_ε ∎

2. Теоремы о реализациях распределений, мо разговор о конечномерных распределениях и диф. свойствах

<u>Th</u> $\exists$ P_n, P – вероятности на (S,ρ)-полном сепарабельном м.п., $\exists$ $P_n \xrightarrow{w} P$. Тогда $\forall$ $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ найдутся такие случ. величины X_n, что $P^{X_n} = P_n$ и $\tilde{P}^{X} = P$, кроме [illegible] $X \xrightarrow{n.в.} X$

Док.-во: Ввиду пространства Лебега, считаем $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Построим борелевский изоморфизм между $[0,1]$ и S. Построим дизъюнктное разбиение $S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ на борелевские множества, такие что $\operatorname{diam} S_j \le 1$ и $P(\partial S_j) = 0$, $P_n(\partial S_j) = 0$. После чего, сделаем его подразбиение, с $\operatorname{diam} S_{j_1 j_2} \le 1/2$. И так далее.

Теперь пересаживаем это на отрезок.

А именно, рассматриваем семейство интервалов $\Delta_j^{(n)}$ и Δ_j, таких что $|\Delta_j^{(n)}| = P_n(S_j)$, $|\Delta_j| = P_n(S)$ и эти отрезки идут в порядке следования индексов. Аналогично пересадим второй уровень и т.д. Ясно, что тогда такая пересадка создаёт взаимно однозначное соответствие между множествами $S \setminus (\bigcup_{\dots} \partial S_{j_1, j_2 \dots})$ и $[0,1] \setminus (\bigcup \partial \Delta_{j_1, j_2 \dots})$. Ясно, что это борелевский изоморфизм. По дороге мы доказали теорему Хаусдорфа-Куратовского.

~~Для каждого уровня~~ Эти отображения мы и назовём X_n и X. Ясно, что $P^{X_n} = P_n$ и $P^X = P$.

Докажем, что $X_n(\omega) \to X$ для всех ω, где мы определили отображение. Действительно, ~~т.к.~~ пусть $\omega \in \operatorname{int} \Delta_{j_1, j_2, \dots j_k}$. Так как $|\Delta^{(n)}_{j_1, j_2 \dots, j_k}| \to |\Delta_{j_1, \dots j_k}|$, с некоторого места $\omega \in \Delta^{(n)}_{j_1 \dots, j_k}$. Тогда $X_n(\omega) \in S_{j_1, \dots j_k}$ и $X(\omega) \in S_{j_1, \dots, j_k} \Rightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| \le 2^{-k}$ ∎

Def Случайным непрерывным процессом назовём случайную величину со значениями в $C([0,1]\to\mathbb{R}^d)$ (*)

Зам. Ясно, что координатные функционалы непрерывны на $C([0,1]\to\mathbb{R}^d)$, стало быть $X(t)$ – случайные величины. Сигма-алгебра, порождённая на цилиндрических множествах, совпадает с борелевской. Стало быть, непр. случайные процессы (т.е. полностью определяются своими конечномерными распределениями).

(Внимание, нам важна непрерывность!)

Мы ищем непрерывные реализации процессов, исходя из их конечномерных распределений:

Th $\exists\ X_n(t)$ – послед-ть случ. процессов, т.ч.

$$\lim_{N\to\infty}\sup_n P(\{|X_n(0)|>N\})=0,$$

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_n P\left(\left\{\sup_{|t-s|<h}|X_n(t)-X_n(s)|>\varepsilon\right\}\right)=0$$

для всех $\varepsilon>0$. Тогда можно выбрать подпосл. X_{n_k}, вер. простр. $(\tilde\Omega,\tilde F,\tilde P)$ и процессы $\tilde X_{n_k}$ и $\tilde X$ на нём, т.ч. $\tilde X_{n_k}$ совп. с X_{n_k} по конечномерным распр. и $\tilde X_{n_k}\xrightarrow{\text{п.в.}}\tilde X$.

Док-во: $\exists\ a$, т.ч. $P(|X_n(0)|>a)<\varepsilon/2\ \ \forall n$,

кроме того, $\forall k\in\mathbb{N}\ \exists\ h_k$, т.ч. $P\left(\left\{\sup_{|t-s|<h_k}|X_n(t)-X_n(s)|>\frac1k\right\}\right)<\frac{\varepsilon}{2^k}$

Тогда на множестве ε-полной меры $|X_n(0)|\le a$ и $\sup_{|t-s|<h_k}|X_n(t)-X_n(s)|\le 1/k$. Стало быть, X_n – компактно, т.е. как меры на $C[0,1]$ $P^{X_n}\xrightarrow{w}P^X$. Но тогда есть и их реализации.

(*) **Def** Набор случайных величин X_t на вер. пр.-ве $(\Omega, \mathcal{B})$ называется случайной функцией.

Th] $X_n(t)$ - посл. случ. непр. процессов. Пусть

$$E(|X_n(0)|^\gamma) \le M \quad \text{для всякого } n \text{ и}$$

$$E(|X_n(s) - X_n(t)|^\alpha) \le M|s-t|^{1+\beta}. \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

Тогда $\{X_n\}_n$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы

Д.-во: По неравенству Чебышёва $P(|X_n(0)| > N) \le \frac{M}{N^\gamma}$ для всех n. Перейдём к проверке равномерной непрерывности в среднем.] D - множество двоично-рациональных точек отрезка. Пусть $Y = X_n$

$$E\left(\left|Y\left(\frac{k}{2^m}\right) - Y\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right|^\alpha\right) \le M 2^{-(1+\beta)m}$$

$$P\left(\left|Y\left(\frac{k}{2^m}\right) - Y\left(\frac{k-1}{2^m}\right)\right| > 2^{-am}\right) \le M \cdot 2^{-(1+\beta)m} \cdot 2^{+a\alpha m} = M\, 2^{m(-1+a\alpha-\beta)}.$$

] $a\alpha - \beta < 0$. Тогда

$$P\left(\sup_{0\le k\le 2^m-1} \left|Y\left(\frac{k}{2^m}\right) - Y\left(\frac{k+1}{2^m}\right)\right| > 2^{-am}\right) \le M \cdot 2^{(a\alpha-\beta)m}$$

Применяя соображения лемма Б.-К. выбираем

$$P\Big(\underbrace{\bigcup_{\nu=m}^{\infty} \sup_{0\le k\le 2^m-1} \left|Y\left(\frac{k}{2^m}\right) - Y\left(\frac{k+1}{2^m}\right)\right| > 2^{-am}}_{=(\Omega_\nu)^c}\Big) \le \delta$$

Тогда на Ω_ν есть δ-равномерная непрерывность. Действительно,] $s \in \left[\frac{k}{2^\nu}, \frac{k+1}{2^\nu}\right]$. Тогда

$$\left|Y\left(\frac{k}{2^\nu}\right) - Y(s)\right| \le \sum_{j\ge\nu}^{\infty} |Y(s_{j+1}) - Y(s_j)| \le \sum_{j\ge\nu} 2^{-aj} \le 2^{-a\nu} \cdot \frac{1}{1-2^{-a}}$$

Устремляем ν к беск., получим, что это $< \varepsilon$. По непр. все доказывается

<u>Th (Колмогоров)</u>] X_t – набор случайных величин, такой что $E(|X_t - X_s|^\alpha) \le M|t-s|^{1+\beta}$. Тогда X_t стохастически эквивалентна непрерывному случайному процессу.

<u>Def</u>] X_t и Y_t – случайные функции. Они эквив., если $P(X_t = Y_t) = 1$ для всех t.

Внимание, свойства могут поменяться, см. пример

<u>Док-во</u>: По лемме Б.-К., для п. в. ω найдётся ν, т. ч. $P\left(\bigcup_{m=\nu}^{\infty} \sup_{0\le k\le 2^m-1} \left|X\left(\frac{k}{2^m}\right) - X\left(\frac{k+1}{2^m}\right)\right| > 2^{-m\alpha}\right) < \varepsilon$. Было бы, на D для почти всех ω $X(\omega)$ – равномерно непрерывная функция. Продолжим её по непрерывности, это будет $\tilde{X}_t(\omega)$. Докажем, что $\tilde{X}_t$ стох. эквив. X. Для точек из D это условие выполнено. Для любой точки не из D это тоже проверить несложно – надо просто добавить её в D.

3. О Броуновском движении

<u>Def</u>] X_t – случайная функция. Её конечномерное распределение $\nu_{t_1, t_2, \dots, t_n}$ – мера на $\mathbb{R}^n$,

$$\nu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A) = P((X_{t_1}, X_2, \dots, X_{t_n}) \in A).$$

<u>Зам.</u> Непрерывный процесс полностью определяется своими конечномерными распределениями.

По каким же наборам конечномерных распределений можно построить случайную функцию?

<u>Th (Колмогоров)</u>

] $\nu_{t_1 \dots t_n}$ – система мер, такая что

1) $\nu_{t_1 \dots t_n} = \nu_{\sigma(t_1) \dots \sigma(t_n)}$ 2) $\nu_{t_1 \dots t_n}(A) = \nu_{t_1 \dots t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k}}(A \times \mathbb{R}^k)$.

Тогда $\exists$ такой набор случ. величин ξ_t, что ~~это~~ ~~это~~ их конечномерные распределения.

<u>Def</u> Гауссова плотность $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^d e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$ с дисп. t и нулевым средним. $= p(x,t)$.

~~Зададим~~

<u>Def</u> (Броун. движение) X_t – ~~ся~~ непрерывный случайный процесс, т. ч. а) ~~$X_{t_i} - X_{t_j}$~~, $\forall\ a_1 \le b_1 < a_2 < b_2 \dots < a_k < b_k$

$X_{b_i} - X_{a_i}$ – независимы, ~~$X(0)$~~

б) $X(0) = 0$ в) $X_{b_i} - X_{a_i} \sim N(0, b_i - a_i)$.

<u>Th</u> Бр. движ. $\exists$.

<u>Док-во</u>: Зададим совм. распределение $\nu_{t_1 \dots t_k}$.

Доп. задать на цилиндр. множествах

$$P(X_{a_1} \in A_1, X_{a_2} \in A_2, \dots, X_{a_k} \in A_k) = \int_{A_1} \cancel{p(x, a_1)}\, dx \cdot$$

$$= P(X_{a_1} \in A_1, X_{a_2} - X_{a_1} \in A_2 - X_{a_1}, \dots) = \int_{A_1} p(x_1, a_1) \cdot \int_{A_2} p(x_2 - x_1, a_2 - a_1) \cdot$$

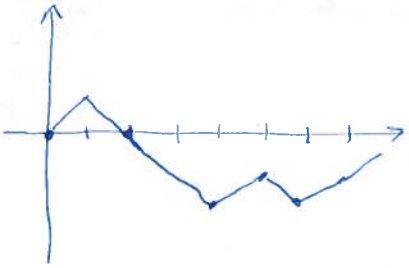
$$\dots \int_{A_k} p(x_k - x_{k-1}, a_k - a_{k-1})\, dx_k\, dx_{k-1} \dots dx_1.$$

Это удова. теореме Колмогорова, стало быть, такая случайная функция $\exists$. Но непр. версия существует по теореме К.

Принцип инвариантности Донскера (Шурик)

$X_1, X_2, \dots$ – независимые испытания Бернулли

$S_k = X_1 + \dots + X_k$



$P(\text{путь}) = \frac{1}{2^k}$

$DS_k = \sum_{i=1}^{k} DX_i = k.$

<u>Def</u> $\tilde{S}_k(t) = S_k(tk) \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$

Почему такая нормировка?

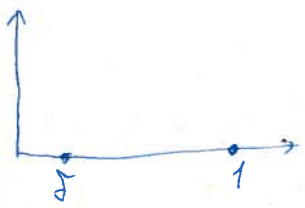
$D(\tilde{S}_k(t)) = \frac{1}{k} D(S_k(k)) = 1.$

<u>Итог</u> $\tilde{S}_k(\cdot)$ – меры на $C([0,1])$.

<u>Th</u> $\{\tilde{S}_k(\cdot)\}$ – плотное семейство мер.

<u>Д.-во</u>: 1. $\tilde{S}_k(0) = 0$

2. $\forall\ \varepsilon, \nu\ \exists\ \delta:\ P(\Delta(\tilde{S}_n, \delta) > \nu) < \varepsilon \quad \forall\ n > n_0$



$\frac{1}{n} \ll \delta$

$$P\left(\Delta\left(\tilde{S}_n, \frac{\delta}{2}\right) > \nu\right) \le \frac{10}{\delta} \underbrace{P\left(\Delta\left(\tilde{S}_n\big|_{[0,\delta]}, \delta\right) > \nu\right)}_{(11)} \quad \diamond$$

$$(=)\ P\left(|\tilde{S}_n(t) - \tilde{S}_n(s)| > \nu,\ t, s \in [0, \delta]\right) \le 2P\left(|\tilde{S}_n(t) - \tilde{S}_n(0)| > \nu/2,\ t, s \in [0, \delta]\right) =$$

$$= 2P\left(\sup_{0 \le k \le \delta n} |S_k| > \sqrt{n} \cdot \frac{\nu}{2}\right) \le 4P\left(|S_{\delta n}| > \sqrt{n} \cdot \frac{\nu}{2}\right) = 4P\left(\frac{|X_1 + \dots + X_n|}{\sqrt{n\delta}} > \frac{\nu}{\sqrt{\delta}}\right) \approx$$

по принципу отражения

$\downarrow$ ЦПТ

$N(0,1)$

$$\lesssim \frac{8}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\nu}{2\sqrt{\delta}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx < c e^{-\frac{\nu}{\sqrt{\delta}}}$$

$$\lesssim \frac{10}{\delta} \frac{8}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{-\nu}{\sqrt{\delta}}}.$$

Какие условия были нужны.

1. $P(\sup |S_k| > A_n) \le \ldots$
2. ЦПТ
3. мн (в интервале разм. δ должно быть случ. блужд.)

О сходимости конечномерных распред.:

$$P((S_n(t_1) \ldots S_n(t_k) \in A) \longrightarrow ?$$

$$P(S_n(t_1) \le a_1, S_n(t_2) \le a_2, \ldots, S_n(t_k) \le a_n)$$

$$= \int_{-\infty}^{a_1} \ldots \int_{-\infty}^{a_k} P(S_n(t_1) = x_1, \ldots, S_k(t_1) = x_k)\, dx_1 \ldots dx_k$$

$$= P(S_n(t_1) = x_1, S_n(t_2) - S_n(t_1) = x_2 - x_1, \ldots S_n(t_k) - S_{k-1}(t_{k-1}) = x_k - x_{k-1})$$

$$= P(S_n(t_1) = x_1) \cdot P(S_n(t_2) - S_n(t_1) = x_2 - x_1) \ldots P(S_n(t_k) - S_n(t_{k-1}) = x_k - x_{k-1})$$

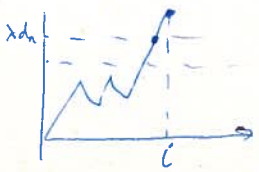
$\downarrow$

ЦПТ (надо вернуть интеграл).

<u>Лемма Колмогорова</u> $X_1, \ldots, X_n$ – центрированные, независимые и с $DX_i^2 = B_i^2$. $S_k = X_1 + \ldots + X_k$, $d_n^2 = D(S_n)$

$$P(\sup_{k=1,n} |S_k| > \lambda d_n) \le 2P(|S_n| > (\lambda - \sqrt{2}) d_n)$$

<u>Д.-во</u>:



A_i – первый раз выше в момент времени i

Мы либо завершимся выше $(\lambda - \sqrt{2}) d_n$, либо ниже.

Событие, вер. которого мы оцениваем, назовём A.

$$P(A) = P(A \cap \{|S_n| > (\lambda - \sqrt{2})d_n\}) + P(A \cap \{|S_n| < (\lambda - \sqrt{2})d_n\}) \le$$

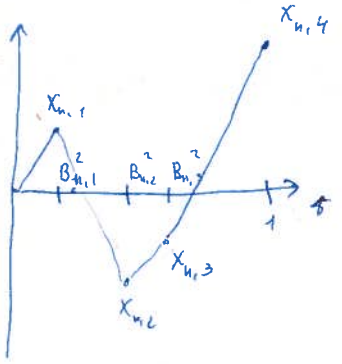
$$\le P(|S_n| > (\lambda - \sqrt{2})d_n) + \underbrace{\sum_i P(A_i \cap \{|S_n| < (\lambda - \sqrt{2})d_n\})}_{\le \sum_i P(A_i \cap \{|S_n - S_i| > \sqrt{2}\, d_n\}) =}$$

$$= \sum_i P(A_i)\, \underbrace{P(|S_n - S_i| > \sqrt{2}\, d_n)}_{\le P\left(\frac{|X_1 + \dots + X_n|}{d_n} > \sqrt{2}\right) \le P\left(\frac{|X_1 + \dots + X_n|}{d_n} > \sqrt{2}\right) < \frac{1}{2}}$$

$\leftarrow$ нер-во Чебышёв.

$\forall n$ есть m_n незав. случайных величин $\{X_{n,1}, \dots X_{n,m_n}\}$ — они центр. и у них есть дисперсия, $\sum_{i=1}^{m} DX_{n,i} = 1$.

$S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,m_n}$.



$m_n = 4$.

$$\sum_{i=1}^{m_n} E X_{n,i}^2 \cdot \chi_{\{|X_{n,i}| > \varepsilon\}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$ — условие Линдеберга

Принцип инвариантности Прохорова

$$S_n(\cdot) \xrightarrow{\text{слабо}} W(\cdot)$$

Что нам надо?

ЦПТ с условием Линдеберга:

$$X_{n,i} \in \mathbb{R}^d \qquad \sum_{i=1}^{m_n} DX_{n,i} = B_n^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} B^2$$

Тогда $S_n \to W(0, B^2)$ в смысле распределений

Мартингалы (Мина)

Пример мартингала – бросания монеты ξ_n,

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_k$ – это мартингал

Вообще, если сложить любые незав. центр. случайные величины.

Если $E\xi_i = 1$, то $\prod_{k=0}^{n} \xi_k$ – мартингал.

<u>Утв.</u> (Неравенство Йенсена)

$\{X_t, A_t\}$ – мартингал

$Y_t = h(X_t)$. Если h – выпукла, то Y_t – субмартингал.

<u>Д.-во:</u> $\exists\, s < t$, $X_s = E(X_t | A_s)$

$$Y_s = h(E(X_t | A_s)) \le E(h(X_t) | A_s) = E(Y_t | A_s)$$

Для дискретного времени

X_n – какой-то процесс, $\Delta X_n = X_n - X_{n-1}$

X_n – мартингал $\Leftrightarrow E(\Delta X_n | A_{n-1}) = 0$.

<u>Утв.</u> Пусть X_n – любое. $\Delta A_n = E(\Delta X_n | A_{n-1})$, $A_0 = 0$

$X_n = A_n + M_n$. Тогда M_n – мартингал, A_n – предсказуем. Более того, такое предст. единственно (по модулю выбора A_0)

<u>Д.-во:</u> $E(\Delta M_n | A_{n-1}) = E(\Delta X_n - \Delta A_n | A_{n-1}) = 0$ по опр.

В обр. сторону: $E(X_n | A_{n-1}) = \underbrace{E(\Delta A_n | A_{n-1})}_{= \Delta A_n} + \underbrace{E(\Delta M_n | A_{n-1})}_{= 0}$

<u>Пример:</u> ξ_i – берн. $\{\pm 1\}$. $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Пусть $X_n = |S_n|$. Уточним разложение Дуба для X_n: $X_n = A_n + M_n$.

Оказывается, что A_n – количество нулей среди $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$

$\Delta M_n = (\operatorname{sign} S_{n-1}) \Delta S_n$. Замечание: A_n - предсказ., M_n - март.

Надо проверить $X_n = A_n + M_n$. Проверим $\Delta X_n = \Delta A_n + \Delta M_n$

Это тривиальная комбинаторика.

$M_n = \sum_k \operatorname{sign} S_{k-1} \Delta S_k$

$|S_n| = \sum_k \operatorname{sign} S_{k-1} \Delta S_k + A_n$.

$E|S_n| = 0 + E A_n$. Узнали EA_n совсем забесплатно.

потому что для нуля

Th (Теорема о свободном выборе, stopping theorem)

$X_n = X_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

σ - натуральнозначная функция. σ согласовано с $\mathcal{A}_n$,

если $\{\omega | \sigma(\omega) \le N\} \in \mathcal{A}_n$

Пусть σ и τ - два марковских момента, τ ограничен.

(*) $E(X_\tau | \mathcal{A}_\sigma) = X_{\tau \wedge \sigma}$, если X_n - мартингал.

$X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$

Что такое A_σ? $\Omega = \bigsqcup_n \sigma^{-1}(n)$

A_σ - минимальная σ-алг., м. что все $\sigma^{-1}(n) \cap A_\sigma \supseteq \sigma^{-1}(n) \cap A_n$

Д.-во: Докажем (*) для п. в. ω_0

Лемма (О локальности условн. мат. ожидания):

$A \supseteq \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$. $A \in \mathcal{A}_1$; $A \in \mathcal{A}_2$. $X = Y$ на A. Тогда $E(X|\mathcal{A}_1) = E(Y|\mathcal{A}_2)$.

Рассмотрим $\mathcal{A}_\sigma$ и $\mathcal{A}_{\sigma(\omega_0)}$

$E(X_\tau | \mathcal{A}_\sigma) = E(X_\tau | \mathcal{A}_{\sigma(\omega_0)})$ для п. в. ω_0 (берем минимум с $A = \sigma^{-1}(\sigma(\omega_0))$).

Докажем $X_{\tau \wedge \sigma} = E(X_\tau | \mathcal{A}_{\sigma(\omega_0)})$ для $\omega \in \sigma^{-1}(\omega_0)$

$X_{\tau \wedge n} = E(X_\tau | \mathcal{A}_n)$. $X_\tau = \sum_m X_\tau \chi_{\{\tau = m\}}$

Надо разбить сумму на две части, $m \le n$ и $m > n$ и станет очевидно.

<u>Th (Дуб)</u> X_n - субмартингал, $\sup_n E|X_n|$ - огр. Тогда

$X_n \to Y$ для п. в. ω.

<u>Д.-во</u>: неполное доказательство.

<u>Th</u> $(X_t, \mathcal{A}_t)$ - мартингал, с почти достоверно непрер. справа траекториями.

$\{\omega : \tau(\omega) < t\} \subset \mathcal{A}_t$. - σ, τ - марковские моменты, $\tau \le \sigma \le C$

$E X_\tau = E X_\sigma$

<u>Д.-во</u>: Sketch.

Простые свойства б. д.

Def $X(t)$: а) $\forall t_0$ $X(t_0+t)-X(t)$ - один. расп.
б) $X(0)=0$ п. н. и $X(t)$ непр. п. н.
в) Независимые приращ.
г) $EX(t)=0$, $EX^2(t)=t$.
$\Rightarrow X(t)=B(t)$

Св.-во X - гауссов проц., $E(X(t))=0$, $E(X(t)X(s))=\min(t,s) \Rightarrow X(t)\overset{d}{=}B(t)$.

Д.-во Следует из Th единственности.

Th а) $\forall c>0$ $\sqrt{c}\,B(\frac{t}{c})\overset{d}{=}B(t)$.

б) $t\cdot B(\frac{1}{t})\overset{d}{=}B(t)$

Д.-во: б) - $tB(\frac{1}{t})$ - гауссов процесс.

$E(tB(\frac{1}{t})sB(\frac{1}{s}))=ts\min(\frac{1}{t},\frac{1}{s})=\min(t,s)$. В прошлому свойству все получается.

Фиксируем $t>0$, $\xi_t(s)=t^{1/2}(s(t-s))^{-1/2}(B(s)-st^{-1}B(t))$, $0<s<t$.

Это броуновский мост.

$E\xi_t(s)=0$

$E\xi_t^2(s)=\frac{t}{s(t-s)}\left(s-2s^2\cdot t^{-1}+\frac{s^2}{t}\right)=1$

$s_1<s_2$ $E(\xi_t(s_1)\xi_t(s_2))=t\cdot\left(\frac{1}{s_1s_2(t-s_1)(t-s_2)}\right)^{-1/2}\cdot\left(s_1-2\frac{s_1s_2}{t}+\frac{s_1s_2}{t}\right)=\left(\frac{s_1(t-s_2)}{s_2(t-s_1)}\right)^{1/2}$

$Q(s)=\frac{as+b}{cs+d}$. Бр. мост инвариантен отн. Q.

$Q: \begin{matrix}0\to 0\\ t\to t_1\end{matrix}$. Тогда $\xi_t(s)=\xi_{t_1}(Q(s))$

Если поменять t_1 и 0 местами, то

$\xi_t(s)\xrightarrow[t\to\infty]{d}s^{-1/2}B(s)$

Th (Дуб. о представлении)

$B(t)-tB(1)\overset{d}{=}(1-t)B(\frac{t}{1-t})$, $0\le t<1$.

Д.-во: $\xi_1(t) = (t(1-t))^{-1/2}(B(t) - tB(1))$

$$\xi_1(t) \underset{(?)}{\overset{d}{=}} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/2} B\left(\frac{t}{1-t}\right)$$

$$Q_N(t) = \frac{Nt}{N+1-Nt}, \quad 0 \to 0, \quad 1 \to N$$

$$\xi_1(t) \overset{d}{=} \xi_N(Q_N(t))$$

Ст, можно просто посчитать ковариац. ф.

$$t_1 - 2t_2t_1 + t_2t_1 = (1-t_1)(1-t_2)\cdot\frac{t_1}{1-t_1}$$

Св-во: $P(B(t) > \sqrt{t}$ $\quad P(\exists t > N : B(t) > t) = 1$

$$P\left(\sqrt{N}B\left(\frac{t}{N}\right) > \sqrt{t} \quad \exists t > N\right)$$

$$\| $$

$$P(\exists t > 1, \text{ т. ч. } B(t) > \sqrt{t})$$

$$1 = P(\exists t > N \cdot B(t) > \sqrt{t} \mid B(1) > \sqrt{1})$$

$$\| $$

$$P(\ldots \mid B(1) > 1, B(2) = x) \quad \text{для п. в. } x.$$

$P(B(t) > \sqrt{t-2} + 1000$ для мн. $) = 1$.

$M(t) = \max\limits_{0 \le s \le t} B(s)$ – это изм., т. к. можно брать по счётному мн.-ву.

Th $\forall x > 0 \quad P(M(t) > x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int\limits_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2t}} dy = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t s^{-3/2} e^{-\frac{x^2}{2s}} ds$

Д.-во: $R_N\left(\frac{k}{2^{2n}}\right) = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{i=1}^{k} \eta_i$

$R_N(t) \to B(t)$ равн. на $[0,1]$. M, m – fix.

$$\tilde{K} = \inf\left(k : R_N\left(\frac{k}{2^{2n}}\right) = \frac{M}{2^m}\right) \le \infty$$

$$P(R_N(1) \ge x : \tilde{K} \le 2^{2n}) = \frac{1}{2}$$

$$P(R_N(1) \ge x) = \frac{1}{2} P(\tilde{K} \le 2^{2n})$$

$$P(\max_{[0,1]} R_n \ge x) = 2P(R_n(1) \ge x)$$

Закон повт. логарифма:

$$P\left(\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t}} = 1\right) = 1$$

$$P\left(\lim_{t\to 0} \frac{B(t)}{\sqrt{2t \ln\ln t^{-1}}} = 1\right) = 1$$

Следствие: $\lim\limits_{t\to t_0^+} \dfrac{B(t)-B(t_0)}{\sqrt{2(t-t_0)\ln\ln(t-t_0)^{-1}}} = 1$ п.в.

Док-во: $\exists\ c>1$, $\exists\ 1<\beta<c^2$. $L(t)=\sqrt{2t\ln\ln t}$

Хотим: $P(\underbrace{M(\beta^{n+1}) < L(\beta^n) \text{ для дост. большого } n}_{\text{неравенств. для разн. траект.}}) = 1$ (1)

Почему этого хватит: $B(t) \le M(\beta^{n+1}) < cL(\beta^n) < cL(\beta t)$ для $t \in [\beta^n, \beta^{n+1}]$.

Докажем (1).

$$P(M(\beta^{n+1}) \ge L(\beta^n)) = \sqrt{\frac{2}{\pi\beta^{n+1}}} \cdot \int\limits_{cL(\beta)}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\beta^{n+1}}}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{c\sqrt{\frac{2\log\log\beta^n}{\beta}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \sim$$

$y=\beta^{\frac{n+1}{2}}z$

$$\sim \frac{e^{-\frac{c^2\log\log\beta^n}{\beta}}}{c\sqrt{\frac{2\log\log n}{\beta}}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sim \frac{(n\log\beta)^{-\frac{c^2}{\beta}}}{\sqrt{\ln n}}$$

этот ряд сойдётся.

Доказываем обратное неравенство.

$\exists\ c<1$, $c<c'<1$. β такое что $c < c'(1-\frac{1}{\beta})^{1/2} = 2\beta^{-1/2}$

β очень большое

$$P\left(B(\beta^{n+1}) - B(\beta^n) > c'\left(1-\frac{1}{\beta}\right)^{1/2} \cdot L(\beta^{n+1}) \text{ для бол. нат. ва } n\right) = 1 \quad (2)$$

Знаем: $P(-B(\beta^n) < 2L(\beta^n)$ для больших $n) = 1$

Тогда $B(\beta^{n+1}) > c'(1-\beta^{-1})^{1/2}L(\beta^{n+1}) - 2L(\beta^n) > cL(\beta^{n+1})$, а это верно

Доказать (2)

Надо применить н. б.-к. в обратную сторону (н.н. $B(p^{n+1})-B(p^n)$ независимы), проверить, что мер разорвётся.

<u>Утв.</u> $\{0,1\} = D_0 \subset D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset [0,1]$, они изолированы и стремятся к нулю.

S_n = кв. вариация, посчит. по D_n от B

$P(S_n \to 1) = 1$.

<u>Д-во</u>: $|D_n| = n+2$

$D_n = \{t_0(n), t_1(n), \ldots, t_{n+1}(n)\}$ - упорядочим их.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (B(t_{k+1}(n)) - B(t_k(n)))^2$$

$$S_n - S_{n+1} = -2(B(t_n) - B(t_k))(B(t_{k-1}) - B(t_n))$$

$\{t_n\} = D_n \setminus D_{n-1}$

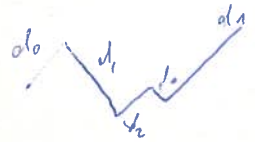
$$E(S_n - S_{n+1}) = 0$$

$$E(S_n) = E(S_{n-1}) = \ldots = 1.$$

$$\cancel{E((S_n - S_{n+1})^2)}$$

$$M_{m,n} = \max_{m \le k \le n} |S_k - S_{m+k}|$$

$$P(\lim_m \lim_n M_{m,n} = 0) = 1$$



Забываем, что происходит между этими точками.

$|B(t_j) - B(t_{j-1})| = d_j$ - fix.

S_{n-k} - мерт. по k относит. разбиений.

<u>Неравенст.</u> нер-во Дуба X - субмартингал, ≥ 0

$S_t = \sup_{0 \le u \le t} X_u$. Тогда 1) $P(S_t \ge c) \le \frac{\|X_t\|_p^p}{c_p}$ при $p \ge 1$

2) $\|S_t\|_p \le \frac{p}{p-1}\|X_t\|_p$, $p \geq 1$

Применим его.

$|S_{n-k}-S_n|$ субмарт. ≥ 0

$$E'\left(\max_{k\in[m,n]}|S_k-S_n|^2\right) \le 4E'\left((S_m-S_n)^2\right)$$

$$\downarrow$$

$$E\left(\max_{k\in[m,n]}|S_k-S_n|^2\right) \le 4E'\left((S_m-S_n)^2\right)$$

$$E\left(\max_{k\in[m,n]}|S_k-S_m|^2\right) \le 239\,E\left((S_m-S_n)^2\right)$$

$$E\left(M_{m,n}^2\right) \le 239\,E\left((S_m-S_n)^2\right)$$

$$\|$$

$$EE'(S_m-S_n)^2 = E\left(E'(S_m^2-2S_mS_n+S_n^2)\right) = E\left(E'(S_m^2)-2S_mE'(S_n)+S_n^2\right) =$$

$$= E(S_m^2-S_n^2)$$

$$E(S_n^2) = E\left(\sum_{k=0}^{n}(B(t_{k+1})-B(t_k))^4 + \sum(B(t_{k+1})-B(t_k))^2(\dots)\right) =$$

$$= 3|t_{k-1}-t_k|^2 + 2\sum(t_{k+1}-t_k)(t_{j+1}-t_j) = 2\sum(t_{k-1}-t_k)^2+1 \longrightarrow 1$$

$$\sup_{n>m}\left(E(S_m-S_n)^2\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\sup_n M_{m,n} = f_n$$

$$E f_n^2 \ ?$$

$f_n = 2f_m$, $f_m \xrightarrow{L^2} 0$. Тогда $f_m \xrightarrow[n.\,e.]{} 0$

Интегралы Ито.

1. Общие слова. Хотим решать уравнения вида

$$(X')_t = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\cdot W_t, \text{ где } W_t \text{ – белый шум,}$$

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s \quad (1), \quad B \text{ – броун. движ.}$$

Как мы знаем, B_t нигде не диф., имеет бесконечную первую вариацию, поэтому интеграл нельзя определить потраекторно.

Будем определять интеграл (1) как интеграл Римана. Однако, есть некоторые тонкости. Рассмотрим простые функции,

$$\varphi(t,\omega) = \sum_{\Delta_j} \chi_{\Delta_j}(t)\cdot \varphi_j(\omega).$$ Для них логично определить интеграл (1) как

$$\int_0^T \varphi(t)\,dB_t = \sum_{\Delta_j} \varphi_j(\omega)\left(B_{b_j}(\omega) - B_{a_j}(\omega)\right),$$

мы считаем, что отрезки Δ_j не пересекались, $\Delta_j = [a_j, b_j]$,

а интеграл $\int_0^t \varphi(s)\,dB_s$ как $\sum_{\Delta_j} \varphi_j(\omega)\left(B_{\min(b_j,t)} - B_{\min(a_j,t)}\right)$.

Возьмём в качестве $\varphi_j(\omega)$ $B_{a_j}(\omega)$ и вычислим мат. ожидания получившихся интегралов.

$$E\int_0^T \varphi(t)\,dB_t = E\left(\sum_{\Delta_j} B_{a_j}\left(B_{b_j}(\omega) - B_{a_j}(\omega)\right)\right) = 0$$

А теперь возьмём $\varphi_j(\omega) = B_{b_j}(\omega)$, вычислим мат. ожидания:

$$E\int_0^T \varphi(t)\,dB_t = E\sum_{\Delta_j} B_{b_j}\left(B_{b_j}(\omega) - B_{a_j}(\omega)\right) = \sum_{\Delta_j} E\left(B_{b_j} - B_{a_j}\right)^2 = \sum_{\Delta_j} |\Delta_j| = T.$$

Но в смысле интеграла Римана они должны быть интегралом от B_t.

В общем-то, не удивительно, что dB_s – не мера, ведь B_s имеет н.н. неограниченную вариацию.

] B_t - броуновское движение, F_t - некоторый непрерывный справа возрастающий поток σ-подалгебр F, B_t согл. с F_t.

Можно взять $F_t = \bigcap_{\varepsilon>0} [B_\xi^{-1}(Bor), \xi \le t+\varepsilon]$. Кроме того, надо в F_t захватать все 0-множества из F. Считаем F_t P-полными.

Рассматриваем класс F_t-согласованных случайных функций $\varphi(t)$.

<u>Def</u> $\mathcal{L}_2$ - пространство неупреждающих функций, квадратично суммируемых, для функций должны быть выполнены 3 свойства

1) φ $F \times Bor$ - измерима
2) φ F_t - согласована
3) $E\left(\int_0^T \varphi^2 dt\right) < \infty$.

<u>Зам.</u> Если простая функция неупреждающая, то φ_j зависит лишь от F_{a_j}.

<u>Зам.</u> Имеет смысл ввести в $\mathcal{L}_2$ эквивалентность

$\Phi \cong \Phi'$, если $E\left(\int_0^T (\Phi - \Phi')^2 dt\right) = 0$

Стоит отметить, что из этой эквивалентности не следует эквивалентность стохастическая! А в обр. следует!

Построим интеграл Ито для простых неупреждающих функций и планировали:

Если $\varphi(t,\omega) = \sum_j \varphi_j(\omega)\chi_{\Delta_j}(t)$, то

$$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi\, dB = \sum_j \varphi_j \cdot (B_{b_j} - B_{a_j})$$

Изучим свойства этого объекта:

а) $I_t(\varphi)$ - мартингал по t.

$$E[I_t(\varphi) | F_s] = E\left[\sum_j \varphi_j (B_{\min(b_j,t)} - B_{\min(a_j,t)}) \,\Big|\, B_s\right] =$$

$$\sum_{j,\, b_j<s} \varphi_j (B_{b_j} - B_{a_j}) + E[\varphi_{j+1} (B_{b_{j+1}} - B_{a_{j+1}}) | F_s] +$$

$$+ \sum_{k,\, a_k \geq s} E[\varphi_k (B_{b_k} - B_{a_k}) | F_s] = \int_0^{b_j} \varphi(t) dB_t + \varphi_{j+1}(B_s - B_{a_{j+1}}) +$$

$$+ 0 = \int_0^s \varphi(t)\, dB_t = I_s(\varphi).$$

5) Имеем также изометрию Ито:

$$E\left(\int_0^T \varphi^2(t) dt\right) = E\, I_T^2(\varphi).$$

<u>Док.-во</u>: $\exists\ \varphi = \sum_{\Delta_j} \varphi_j \chi_{\Delta_j}$, $\psi = \sum_{\Delta'_j} \psi_j \chi_{\Delta'_j}$.

Тогда $E\left(\int_0^T \varphi(t)\psi(t) dt\right) = \sum_{i,j} E \int_0^T \varphi_i \psi_j \chi_{\Delta_i}(t) \chi_{\Delta'_j}(t) dt =$

$$= \sum_{i,j} E \varphi_i \psi_j \cdot |\Delta_i \cap \Delta'_j|.$$

$$E\, I_T^2(\varphi) = E \sum_{i,j} \varphi_i \psi_j \Delta_{\Delta_i} B \Delta_{\Delta'_j} B = \sum_{i,j} E \varphi_i \psi_j |\Delta_i \cap \Delta_j|.$$

Сначала было, интеграл Ито – изометрия из $\mathcal{L}_2$ и M_2 – пространство квадратично интегрируемых мартингалов,

$$|M_T|^2 = \{E M_T^2\}^{1/2}. \quad (*)$$

Надо доказать, что простые ступ. функции плотны в $\mathcal{L}_2$.

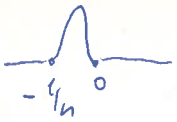
<u>Утв.</u> это верно.

<u>Док.-во</u>: В три этапа.

1) $\exists\ g \in \mathcal{L}^2$, g – огр. и $g(u)$ непр. п. в.

Тогда надо приблизить $(*)$ и по Th Лебега перейти к пределу.

2) $\exists\ g \in \mathcal{L}^2$. Тогда приблизим её функциями из предыдущего пункта.

] $\psi_n(x)$:  - шапочка. Тогда

Рассмотрим $g * \psi_n = g_n$

Ясно, что $g_n \to g$ в L_2

Почему $g_n(t)$ изм. отн. F_t ?

Мне кажется, что потому что есть прогрессивно-измеримая модификация, а для неё это очевидно.

3) С ограниченностью можно побороться срезками.

Итак, мы построили интеграл Ито.

Пример:

$$\int_0^t B_s \, dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Th У инт. Ито есть непр. модификация.

(*) M_2 - полное пространство. Это следует из неравенства Дуба : $E \sup |M_t|^2 \le 4 E |M_T|^2$

Д-во: Если процесс был кусочно-постоянным, то получившийся процесс-интеграл непрерывен. ~~Пусть φ - процесс из определения, приблизим их кус-постоянными процессами φ_n.~~

~~Выберем φ_{m_n} так, чтобы $E\left|\left(\int_0^T \varphi_{m_n}^2 dB_t - \int_0^T \varphi_{m_{n+1}}^2 dB_t\right)^2\right| \le 2^{-k}$.~~

~~По неравенству Дуба $E \sup_t \left|\left(\int_0^t (\varphi_{m_n} - \varphi_{m_{n+1}})^2 dB_t\right)^2\right| \le 2^{-n}$, стало быть,~~

~~$P\left(\sup_t \left|\int_0^t (\varphi_{m_n} - \varphi_{m_{n+1}}) dB_t\right| > \varepsilon\right) < 2^{-n}$~~

Достаточно доказать, что M_2^0 (пространство непрерывных квадратично-интегрируемых мартингалов) замкнуто в M_2.

Докажем это. Пусть φ_n - последовательность в M_2^0; φ - её предел.

Выберем подпоследовательность φ_{n_k}, так чтобы

$E(\varphi_{n_k}(T) - \varphi_{n_{k+1}}(T))^2 < 2^{-3k}$. Тогда, по нер-ву Дуба,

$$E\left(\sup_{0<t<T} (\varphi_{n_k}(t) - \varphi_{n_{k+1}}(t))^2\right) < 4\cdot 2^{-3k}, \text{ следовательно,}$$

$$P\left(\sup_{0<t<T} |\varphi_{n_k}(t) - \varphi_{n_{k+1}}(t)| > 2^{-k}\right) < 4\cdot 2^{-k}.$$

Стало быть, по лемме Б.-К., φ_{n_k} почти наверно сходится в $C([0,T])$. Но этот предел п. н. совпадает с φ.

<u>Def</u>] X - случ. процесс, а σ_n - последовательность моментов остановки (естественно, измеримая относительно F_t), $\sigma_n < \infty$ и $\sigma_n \uparrow \infty$.] $X_n(t) = X(t \wedge \sigma_n)$. Если все X_n - мартингалы, то X - локальный мартингал.

Если X_n - квадратично интегрируемы, то X - локально квадратично интегрируемый мартингал.

Это понятие позволит нам определить интеграл Ито от процессов Φ, таких что $P\left(\int_0^t \Phi^2(s,w)\,ds < \infty\right) = 1$.

Действительно, введем моменты остановки,

$$\sigma_n(w) = \inf_t \left(\int_0^t \Phi^2(t,w)\,dt \geq n\right) \wedge n.$$

$$\Phi_n(s,w) = I_{\{\sigma_n(w) \geq s\}}\, \Phi(s,w),$$

$$I(\Phi)(t) = I(\Phi_n)(t) \quad \text{при} \quad t \leq \sigma_n$$

<u>Зам.</u> Можно брать многомерные интегралы Ито по многомерному Броун. движению.

<u>Def</u>] B_t - одномерное Бр. движ.. Пусть X_t - процесс вида

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,w)\,ds + \int_0^t v(s,w)\,dB_s,$$ где v - удовлетворяет условиям суммируемости, а $\int_0^t |u(s,w)| < \infty$ п. н.

Th (Формула Ито)

Пусть $dX_t = u\,dt + v\,dB_t$, $g(t,x) \in C^2((0,\infty)\times\mathbb{R})$. Рассмотрим $Y_t = g(t, X_t)$.

Тогда это тоже процесс Ито, причём

$$dY_t = g_t(t,X_t)dt + g_x(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2} g_{xx}(t,X_t)(dX_t)^2.$$

~~где $dX_t \cdot dX_t =$~~

Д-во: считаем, что все функции g, g_t, g_x, g_{xx} ограничены, потом мы от этого избавимся.

Также будем считать функции u и v ступенчатыми, потом перейдём к пределу.

Запишем формулу:

$$g(t,X_t) = g(0,X_0) + \sum_j \Delta g_j(t_j, X_j) = g(0,X_0) + \sum_j g_t \Delta t_j +$$

$$+ \sum_j g_x \Delta X_{t_j} + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(\Delta t_j)^2 + \frac{1}{2}\sum_j g_{tx}\Delta t_j \Delta X_{t_j} + \frac{1}{2}\sum_j (\Delta X_{t_j})^2 +$$

$$+ \sum_j R_j, \quad \text{где } R_j = o(|t|^2 + |X_j|^2).$$

Первая и вторая суммы:

$$\sum_j g_t \Delta t_j \Rightarrow \int_0^t g_t(s)ds,$$

$$\sum_j g_x \Delta X_{t_j} = \sum_j g_x \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} u(s,X_s)ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} v(s,X_s)dB_s\right) \to$$

$$\to \int_{t_j}^{t_{j+1}} g_x (u\,ds + v\,dB_s) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} g_x\, dX_s.$$

Докажем, что члены вида $\sum_j a_j \Delta t_j \Delta X_j$ стремятся к нулю.

$$E\left(\left(\sum_j a_j \Delta t_j \Delta B_j\right)^2\right) = E\left(\sum_j a_j^2 (\Delta t_j)^3\right) \to 0.$$

(Все стремятся к нулю т.к. v и u – ступенчатые функции, для них значение в точке мож. интерполировать)

Осталось показать, что

$$\sum_j g_{xx} v_j^2 (\Delta B_j)^2 \text{ стремится к } \int^t g_{xx} v_j^2 ds$$

$$E\left(\left(\sum_j a_j (\Delta B_j)^2 - \sum a_j \Delta t_j\right)^2\right) =$$

$$= \sum_{i,j} E\left(a_i a_j ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)\right)$$

Видно, что при $i \neq j$ мат. ожид. обращается в нуль.

Последнюю сумму легко посчитать, она действ. стремится к нулю.

Осталось избавиться от ограниченности. Пусть $\sigma_n(w) = \inf\{t \mid |X_t(w)| \geq n\}$. Тогда

$$\cancel{\int_0^t v\, g_x(s, X_{s\wedge\sigma_n(w)})\, dB_s = \int_0^{t\wedge\sigma_n(w)} v\, g_x(s, X_s)\, dB_s}$$

$$\int_0^t v \cdot g_x(s, X_s) \cdot \mathbb{1}_{\{|X_t(w)| \leq n\}}\, dB_s = \int_0^{t\wedge\sigma_n(w)} v\, g_x(s, X_s)\, dB_s.$$

Теорема Дуба-Мейера.

$\{S_t\}_{0\leq t<T}$ – cadlag субмарт. класса D.

Тогда $S = M + A$, где M – март., A – предсказ. возр. процесс.

$A_0 = 0$.

Наблюдение $L^1(\Omega)$, $f_0, f_1, \dots, f_n$, $\|f_i\| < C$

<u>Лемма (Komlos)</u>

$f_i \in H$, $\|f_i\| < C$

$\exists\, g_i \in \mathrm{conv}(f_i, f_{i+1}, \dots)$, g_i – фунд. в H.

Аналог для L^1

Лемма (Komlos - 2)

$f_i \in L^1(\Omega, P)$

f_i - равном. инт. семейство

$\exists\, g_i \in \mathrm{conv}(f_i, f_{i+1}, \dots)$

g_i - фунд. в H.

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$, $\mathcal{F}_t$ - возрастающая

$\mathcal{F}_0$ содержит все мн.-во меры 0, фильтрация непрерывна справа и слева,

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \bigcap_{t \geq \tau} \mathcal{F}_t$$

$$\mathcal{F}_{\tau-} = \sigma\Big(\bigcup_{t \leq \tau} \mathcal{F}_t\Big)$$

Def T - момент остановки, если $T: \Omega \to \mathbb{R}_+$ ~~мо~~ - измеримая величина $\{T \leq t\} \subset \mathcal{F}_t$

Зам. T - момент остановки $\Rightarrow \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Def X_t - ст. процесс, X_t - càdlàg, если

п. в. $\omega \in \Omega$ $X_t(\omega)$ - непрерывна справа и имеет левые пределы.

Def $\exists$ T - оп. момент остановки. Тогда

$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$

X_T - случ. величина

X_t^T - случ. процесс

$\parallel$

$X_{t \wedge T}$

Def X_t - предсказуем, если $X_t \in \mathcal{F}_{t-}$. (?)

<u>Def</u> (?) $X \in \mathcal{S}$ наш. б-алг., относительно которой измеримы все непрерывные слева процесс.

<u>Def</u> Класс D S_t - предсказуемый

$\forall$ огранич. момента остановки, $0 \le \tau \le T$

S_τ равномерно ~~ограничено~~ интегрируемо.

<u>Д.-во</u>: Н. у. о. $T = 1$.

D_n - диадическое разбиение шага $\frac{1}{2^n}$, D - их объединение

S^n - дискр. дмарт., дискретизация S_t на D_n

$S^n = M^n + A^n$

<u>Д.-во</u> (Komlos 1):

f_n - огр. в H

$A = \sup_{n \ge 1} \inf \{ \|g\|, g \in \operatorname{conv}\{f_i, f_{i+1}, \dots\} \}$

$A < \infty$

$g_n : \|g_n\| \le A + \frac{1}{n}$

$]\varepsilon > 0 \ \exists N : \inf\{\|g\| : g \in \operatorname{conv}\{f_N \dots\}\} > A - \varepsilon \Rightarrow k, m > N$

$\|\frac{g_k + g_m}{2}\| \ge A - \varepsilon \Rightarrow \|g_k - g_m\| \le \varepsilon \Rightarrow g_m$ - фунд.

<u>Док.-во</u> (Komlos 2):

$f_n^{(i)} = f_n \cdot \chi_{|f| < i}$

$f_n^{(i)} \in L^2$, $\|f_n^{(i)}\| \le i$

$\lambda_n^i, \lambda \dots \lambda_N^i$

$g_n^1 = \lambda_n^{(1)} f_n + \dots + \lambda_{N_n}^{(1)} f_{N_n}$

$g_n^2 = \lambda^{(2)}$

Аппельбаум, Куприянов, Бородин и Фин

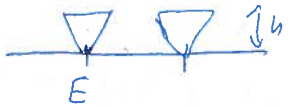
Градиенты гармонических функций.

Th (Лузин-Приваалов):

f - функция в H в верхней п. п.

$\lim\limits_{z \to x} f(z) = 0$ $\forall$ x из некоторого мн.-ва положительн. меры.

Д-во (аналитическое):



$E \subseteq U = \bigcup\limits_{x \in E} F_h(x)$

Утв. $hm_U(z, E) > 0$

$hm_{H}(w, E) \le c < 1$ $\forall$ $w \in \partial U \setminus E$

$\log |f(z)| \le \max\limits_{E} \log |f(z)| \cdot |E| = -\infty$

$(\operatorname{Re} f, -\operatorname{Im} f)$ - градиенты гармонической функции.

Th (Вольф) $\exists$ гарм. градиент $f \in Hol_E(\mathbb{R}^+_3)$, $E \in \mathbb{R}^2$, п. ?

$\Leftrightarrow$ град. $f = 0$ на E

Теорема Пусть u - гарм. вещ. поле на в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $E \in \partial\Omega$, $Hm_\Omega(E, z) > 0$, $u_{ij} = \partial_j u_i$, $\tilde{A} = u^T u$, λ_0 - max собств. число $\tilde{A}$

$A = \lambda_0^{-1} u^T u$. $A(z)$ и $\bar{u}$ имеет непр. прод. на E, чтобы $A(z) \ge 3$.

Тогда $u|_E = 0 \Rightarrow u = 0$.

Д-во: W_t - броун. движ.

$u(W_t)$, доказываем, что не приует в 0 $\in \{W_t$

$$u_i(W_t) = du_i(W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^n) = \sum_{j=1}^n \partial_j u_i(\bar{W}_t)\, dW_t^j + \underbrace{\sum_{j=1}^n \partial_j \partial_j u_i(\bar{W}_t)}_{=0}\, dt$$

$$d\langle u(W_t), u(W_t)\rangle = \sum_{i=1}^n 2u_i\, du_i + \sum_{i=1}^n (du_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n 2u_i \sum_{j=1}^n \partial_j u_i(\bar{W}_t)\, dW^j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_j u_i)^2\, dt = \overbrace{\sum_{i=1}^m 2u_i \sum_{j=1}^n \partial_j u_i\, dW_t^j}^{dM_t}$$

$+\mathrm{Tr}(\tilde{A})dt$

$$I_t = (\bar{u}_t, \bar{u}_t)$$

$$d\log I_t = \frac{1}{I_t} dI_t - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{I_t^2}(dI_t)^2 = \frac{1}{I_t} dM_t + \frac{\mathrm{Tr}\tilde{A}}{I_t} dt - \frac{1}{2}\frac{(dM_t)^2}{I_t^2} =$$

$$(dM_t)^2 = 4(\bar{u}^T U^T U u)\,dt$$

$$= \frac{1}{I_t} dM_t + \frac{dt}{I_t}\left(\mathrm{Tr}\tilde{A} - \frac{2\bar{u}^T\tilde{A}u}{(\bar{u},\bar{u})}\right)$$

$$\exists\ \mathrm{Tr}\tilde{A} \geq 2\lambda_0 \quad (\text{предп.})$$

$\log I_{t\wedge\tau^N}$ — субмартингал, $\tau^N = \min_t \log I_t = -N$ или выход из Q.

$$E\log I_{\tau^N} \geq \log I_{\tau_0} = C$$

$$\wedge\!\!|$$

$$-N\cdot \mathbb{P}(\log I_{\tau^N} = -N) + C$$

$$N\mathbb{P}(\log I_{\tau^N} = -N) < C$$

$\bar{v} = Q\bar{u}$, $V = QU$

Т.к. ранг больше 3, то можно сделать, чтоб в какой-то точке с-числа были 1, 1, 1, тогда след больше 2.

Интегралы по мартингалам.

Берем M_2, $M_t \in M_2$.

<u>Утв.</u> $\exists!$ A_t — предск. возр., т.ч. $M_t^2 - A_t$ — F_t-мартингал

<u>Док.-во</u>: M_t^2 — субмартингал, он принадл. классу DL.

$E(M_\sigma^2 | F_\sigma) \geq M_\sigma^2$. Применим Дуба-Мейера.

Аналогично, если M_t и N_t — два март. из M_2, тогда $\exists!$ ~~тогда~~ $M_t N_t - A_t$ — F_t март.

A_t для $M_t N_t$ называется квадратической ковариацией и обозначается $\langle M_t, N_t \rangle$

<u>Пример</u> Если $B_t = (B_1, B_2)$ – б. д., то

$$\langle B_i, B_j \rangle = \delta_{ij}\, t.$$

$\mathcal{L}^2(M) = \{ \varphi$ – бер предск. проц., т. ч. $\forall\, t > 0$

$$E \int_0^t \varphi_t^2 \, d\langle M_t \rangle < \infty \}$$

$$I^M(\varphi)(t) = \sum_{i=0}^{n} \cancel{\varphi(t)}\, \varphi_j \left(M_{t_{i+1}}(t) - M_{t_i} \right)$$

<u>Зам.</u> $\| I_M(\varphi) \|_2 = \| \varphi \|_2^M$

<u>Свойства</u>: $I^M(\varphi)$

1) $I^M(\varphi) = 0$ п. в.

2) $\forall\, t > s > 0$ $\quad E\left(I^M(\varphi)(t) - I^M(\varphi)(s) \,|\, F_s \right) = 0$

3) $E\left(\left(\int_s^t \varphi(y)\, dy\, s \right)^2 \Big| F_s \right) = E\left(\int_s^t \varphi^2(y)\, d\langle M \rangle(y) \right).$

4) σ, τ – F_t – момент ост. $\tau \geq \sigma$ п. в.

$$E\left(I^M(\varphi)(t \wedge \tau) - I^M(\varphi)(t \wedge \sigma) \,|\, F_\sigma \right) = 0$$

5) $I^M(\varphi) = I^M\left(\mathbb{1}_{\{\sigma > t\}} \varphi(t) \right)$

Стохастическ. исчисление по точечным процессам.

(X, B_X, μ) $p: D_p \subset (0,\infty) \to X$, D_p счётно, дискретно

↑ опт. функция

$N_p(dt\,dx)$

$N_p((0,s)\times U) = \#\{t \in D_p \mid t \le s,\ p(t) \in U\}$

Π_X, $B(\Pi_X)$

↑ множество пар (p, D_p), $B(\Pi_X)$ – ~~множество~~ мин. σ-алг., относ. которой все p изм. $p \mapsto p((0,s)\times d)$.

<u>Def</u> Точечный процесс p на (Ω, F, P), если $p: \Omega \to \Pi_X$ измеримо.

<u>Def</u> Стационарный точ. процесс, если p и $\Theta_t p$ имеют один. распр. $(\Theta_t p(s) = p(s+t))$

<u>Def</u> p – пуассоновский, если $N_p(dt\,dx)$ – пуассоновская мера

~~<u>Утв.</u> Пуасс. процесс стац., если $N_p(dt\,dx) = dt\,n(dx)$,~~

~~$n(dx) = E\,n_p(dt\,dx) = E(N_p(dt\,dx))$~~

<u>Def</u> $\mu: \Omega \to M(X)$ – пуасс. случ. мера, если

1. $\forall B \subset B_X$ $\mu(B)$ имеет пуасс. распр., т. е. $P(\mu(B)=n) = \frac{\lambda(B)\cdot e^{-\lambda}}{n!}$, где λ – интенсивность пуасс. меры.

2. Если B_j, то μB_j – независимы

3. Если $\lambda(U) = \infty$, то $\mu(U) = \infty$ п. н.

(Ω, F, P), F_t – фильтрация, p – точ. процесс.

p F_t – сог., если $N_p(t, U) = \sum_{s \in D_p} I_U(p(s))$ – F_t – сог. при всех U

p - σ-конечный, если $E(N_p(t, U_n)) < \infty$, U_n - исч. х.

$\Gamma_p = \{U \subset X \mid E(N_p(t, U)) < \infty\}$

$t \to N_p(t, U)$ - пуассон. возр. сост. F_t-процесс

$\exists$ $\hat{N}_p$ - предск. возр. процесс, т. ч.

$N_p - \hat{N}_p$ - март. отн. F_t.

<u>Def</u> $\hat{N}_p$ - компенсатор p.

(Зам., вообще $\hat{N}_p$ не мера по U и по t разр.)

Если X - метр. пр.-во и Ω - пр.-во Лебега, то всё хорошо.

<u>Def</u> p - F_t-сост. точечный процесс, он $\in QL$, если

1. $t \to \hat{N}_p$ - непр. F_t-проц. н. м.
2. $\forall t$ $U \to \hat{N}_p(t, U)$ - σ-кон. мера
3. $U \in \Gamma_p$, тогда $N - \hat{N}$ - F_t-март.

$\hat{N} = \tilde{N}$

<u>Пример</u> p-пуассоновский, тогда $\hat{N}_p = E(N_p \xi)$

+ стац.

$\hat{N}_p(t, U) = t \cdot n(U)$

<u>Th</u> p-точечный QL процесс, $\tilde{N}_p(t, U_1)$, $\tilde{N}_p(t, U_2) \in M_2$

$\langle \hat{N}_p(\cdot, U_1), \tilde{N}_p(\cdot, U_2) \rangle (t) = \hat{N}_p(t, U_1 \cap U_2)$

<u>Лемма</u> $X(t) = \int_0^t f(s)\, d\tilde{N}_p(s, U)$, где мы это понимаем $d\tilde{N} = dN - d\hat{N}$

f_s - предсказ., $U \in \Gamma_p$

σ_n - матр. моментов ост. $\tilde{N}^{(n)}(t, U_j) = N_p(t \wedge \sigma_n, U_j)$ - огр.

Докажем, что

$$\tilde{N}_p(t, U_1) \cdot \tilde{N}_p(t, U_2) = \text{мар.} + \hat{N}_p(t, U_1 \cap U_2)$$

$$\shortparallel$$

$$\underbrace{\int_0^t \tilde{N}_p(s-, U_1)\, \tilde{N}_p(ds, U_2)}_{\text{мартингал по лемме}} + \int_0^t \tilde{N}_p(s, U_2)\, \tilde{N}_p(ds, U_1)$$

$$+ \underbrace{\int_0^t (\tilde{N}_p(s, U_2) - \hat{N}_p(s-, U_2))\, \tilde{N}_p(ds, U_1)}_{I}$$

$$d\tilde{N} = dN - \underbrace{d\hat{N}}_{\text{это непр. процесс, по лемму } I \text{ равен нулю}}$$

$$I = \sum_{\substack{s \le t \\ p(s) \in U_1}} [\tilde{N}_p(s, U_2) - \tilde{N}_p(s-, U_2)] = N(t, U_1 \cap U_2) - \hat{N}(t, U_1 \cap U_2) +$$

$$\neq 0 \iff p(s) \in U_2$$

$$+ \hat{N}(t, U_1 \cap U_2)$$

<u>Def</u> $f(t, x, \omega)$ – предск. процесс, если она изм.

~~(t, x, ω)~~ $\mathcal{G} / \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$

$\mathcal{G}$: 1. $(x, \omega) \to g(t, x, \omega)$ $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{F}_t$ – изм.

2. (x, ω) $t \to g(t, x, \omega)$ непр. слева.

$F_p = \{ f(t, x, \omega)$ – процесс $\int_X f(t, x, \omega) N_p(ds\, dx) < \infty$ п. в.

$F_p^1 = \{ f : E(\int_0^t \int_X |f(t, x, \omega)| \hat{N}_p(ds\, dx)) < \infty$

F_p^2 – то же с квадратом.

$$\int_0^t \int_X |f(s, x, \cdot)| N_p(ds, dx) = \sum_{s \le t} f(s, p(s), \omega)$$

$$E\left(\int_0^{t+}\int_x |f(s,x,\cdot)|\, N_p(ds\,dx)\right) = E\left(\int_0^{t+}\int_x |f(s,x,\cdot)|\, \hat{N}_p(ds\,dx)\right)$$

$$< \int_0^{t}\int_x |f(s,x,\cdot)|\, \hat{N}(ds\,dx) > = \int_0^{t}\int_x |f(s,x,\cdot)|^2 \nu_p(dt\,dx)$$

<u>Def</u> Семимартингал.

$$X(t) = X(0) + A(t) + M(t)$$

F_t - сопр. процесс

$M(t)$ - локальный март., $M(0)=0$

$A(t)$ - непрер. справа с пролет., имеющим кон. вар. п.с.

<u>Def</u> Семимартингал - light

$$X(t) = X(0) + \underset{\text{непр.}}{A'(t)} + \underset{M_2}{M''(t)} + \int_0^{t+}\int_x f_1(s,x,\cdot)\, N_p(ds\,dx) + \int_0^{t+}\int_x f_2(s,x,\cdot)\, \tilde{N}_p(ds\,dx)$$

f_1 и f_2 имеют разд. носитель.

$f_1 \in F_p$, $f_2 \in F_p^{2,loc}$

<u>Пример</u> $X(t)$ d-мерный процесс Леви (непр. справа с стац. неза. приращ.)

$D_p = \{t : X(t-) \neq X(t+)\}$ $\quad p = X(t+) - X(t-)$

p - пуасс. процесс.

<u>Th</u> (Леви-Ито) $\exists$ d'-мерный б.д. матрица A, б.л. B_i

$$X^i(t) = X^i(0) + \sum_{i=1}^{d} a_i B^i(t) + b^i t + \int_0^{t+}\int_{\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} x^i I_{\{|x|>1\}}\, N_p(ds\,dx) + \int_0^{t+}\int_{\mathbb{R}^d} x^i I_{\{|x|\le 1\}}\, \tilde{N}_p(ds\,dx)$$

Стохастические дифференциальные уравнения.

Мы будем решать уравнения вида

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t,X_t) + \sigma(t,X_t)\, W_t;\ b(t,x), \sigma(t,x) \in \mathbb{R},\ \text{а } W_t \text{ - б.ш.}$$

Мы условились понимать их в смысле интегралов Ито, т.е.

$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s$, мы формально полагаем $\frac{dB_s}{ds} = W_s$ (как мы знаем, например, это можно понимать в смысле обобщённых функций).

Сразу же рассмотрим пример.

Пусть N_t — размер популяции в момент времени t. Простая модель описывается уравнением $\frac{dN_t}{dt} = r N_t$, где r — некоторое число. Однако, разумно учесть влияние случайных факторов и положить $r(t) = r + \alpha W_t$.

~~$\frac{dN_t}{dt} = r\,dt$~~ Мы приходим к уравнению ~~$dN_t = r\,dt + \alpha\,dB_t$~~.

$$dN_t = r N_t\,dt + \alpha N_t\,dB_t \iff \frac{dN_t}{N_t} = r\,dt + \alpha\,dB_t.$$

Как решать это уравнение? Интуиция подсказывает рассмотреть $d(\log N_t)$.

$$d(\log N_t) = \frac{1}{N_t}\,dN_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{N_t^2}\right)(dN_t)^2, \text{ или } \frac{dN_t}{N_t} = d(\log N_t) + \frac{1}{2}\left(\frac{dN_t}{N_t}\right)^2$$

Отсюда видно, что ~~$\frac{dN_t}{N_t}$~~ у dN_t коэф. при dB_t положительный и равен α. Кроме того, $\left(\frac{dN_t}{dt}\right)^2 = \alpha^2$.

$d(\log N_t) + \frac{\alpha^2}{2} = r\,dt + \alpha\,dB_t$, что означает, что

$$\log N_t - \log N_0 = \int_0^t \left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)dt + \int_0^t \alpha\,dB_s = t\left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right) + \alpha B_t$$

$N_t = N_0 \cdot \exp\left(t\left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right) + \alpha B_t\right)$. ~~Таким образом, кроме случайной поправки $e^{\alpha B_t}$ мы получим~~. Казалось бы, что кроме случайной поправки $e^{\alpha B_t}$ мы получим и несущественную, однако, это не совсем так.

Зам. $E(N_t) = E(N_0)\cdot e^{rt}$; действительно,

мы знаем, что

$$N_t - N_0 = \int_0^t r N_s\, ds + \int_0^t \alpha N_s\, dB_s \text{, тогда}$$

$$EN_t - EN_0 = \int_0^t r \cdot EN_s\, ds + \int_0^t 0, \text{ стало быть,}$$

$$(EN_t)' = r \cdot EN_t, \text{ т.е. } EN_t = EN_0 \cdot e^{rt}.$$

Отметим асимпт. свойства полученного решения: если $r > \frac{1}{2}\alpha^2$, то $N_t \to \infty$ п.н., если $r < \frac{1}{2}\alpha^2$, то $N_t \to 0$ п.н. В случае $r = \frac{1}{2}\alpha^2$ $N_t \to 0$ п.н., например, по закону повт. логарифма.

Приведём ещё один пример — броуновское движение на окружности, e^{iB}. По формуле Ито

$$dY_1(t) = dB_t \cos B_t = -\sin B_t\, dB_t - \frac{1}{2}\cos B_t\, dt$$

$$dY_2(t) = d\sin B_t = \cos B_t - \frac{1}{2}\sin B_t\, dt$$

$$\cancel{de^{iB}} = dY_t = -\frac{1}{2}Y_t\, dt + KY\, dB_t, \text{ где } K \text{ - матрица } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

~~Обратимся теперь к теоремам существования и един~~

Рассмотрим приложение первого примера к кратным интегралам Ито. Для этого рассмотрим полиномы Эрмита:

$H_n(t,x) = \frac{(-t)^n}{n!} \exp\left(\frac{x^2}{2t}\right) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$. Мы будем использовать $H_n(t,x) = \frac{1}{n!} e^{-\frac{tD_x^2}{2}} x^n$

<u>Лемма</u> $e^{\gamma x - \frac{\gamma^2 t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \cdot H_n(t,x)$

<u>Доказательство</u>: $\cancel{e^{\gamma x - \frac{\gamma^2 t}{2}} = e^{\left(\gamma\sqrt{\frac{t}{2}} - x\cdot\sqrt{\frac{1}{2t}}\right)^2} e^{\frac{1}{4}\left(x\cdot\sqrt{\frac{2}{t}}\right)^2} = e^{\frac{x^2}{2t}} \cdot e^{\left(\gamma\sqrt{\frac{t}{2}} - x\cdot\sqrt{\frac{1}{2t}}\right)^2}}$

~~Хотим доказать~~ $\cancel{\frac{\partial^n}{\partial\gamma^n} e^{\left(\gamma\sqrt{\frac{t}{2}} - x\sqrt{\frac{1}{2t}}\right)^2}\Big|_{\gamma=0} = \frac{(-t)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)}$.

~~Ясно, что в выражении справа~~

Разложим по формуле Тейлора:

$$\cancel{e^{\left(\gamma\sqrt{\frac{t}{2}} - x\sqrt{\frac{1}{2t}}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial\gamma^n} e^{\left(\gamma\sqrt{\frac{t}{2}} - x\sqrt{\frac{1}{2t}}\right)^2}\Big|_{\gamma=0} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}}$$

Действительно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n M_n(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \cdot \frac{1}{n!} e^{-\frac{tD_x^2}{2}} x^n = e^{-\frac{tD_x^2}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \gamma^n x^n \right) =$$

$$= e^{-\frac{tD_x^2}{2}} \cdot e^{\gamma x} = e^{-\frac{t\gamma^2}{2}} e^{\gamma x} = e^{\gamma x - \frac{t\gamma^2}{2}}.$$

Рассмотрим теперь процесс из первого примера, $N_t = \exp(t(r - \frac{\alpha^2}{2}) + \alpha B_t)$. При $r=0$ он будет мартингалом.

$$N_t = \exp\left(\alpha B_t - t \cdot \frac{\alpha^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cdot M_n(t, B_t),$$ кроме того, $dN_t = \alpha N_t \, dB_t$,

т.е. $$N_t = 1 + \int_0^t \alpha N_s \, dB_s = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n+1} \cdot \int_0^t M_n(s, B_s) \, dB_s$$

$$\| \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n M_n(t, B_t)$$

Стало быть, $$M_n(t, B_t) = \int_0^t M_{n-1}(s, B_s) \, dB_s$$

$M_n(t, B_t) = t^{n/2} h_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ (это следует из формулы для производящей функции),

т.е. $$\int_0^t t^{\frac{n-1}{2}} h_{n-1}\left(\frac{B_s}{\sqrt{s}}\right) dB_s = t^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right),$$ или

$$\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} \left(\int_0^{t_1} dB_{t_1} \right) dB_{t_2} \dots dB_{t_n} = t^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}}\right).$$

Обратимся теперь к теоремам существования и единственности.

<u>Th</u>] $b : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – измеримы, кроме того, $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \le C(1+|x|)$ и эти функции липшицевы по второй переменной.] ξ не зависит от F_∞, порожд. B_s, с конечным вторым моментом. Тогда диф. ур. имеет единств. непр. реш. X_t, т.к. X_t сог. с F_t и $E\left(\int_0^T |X_t|^2\right) < \infty$.

<u>Зам.</u> Легко, что разм. 1 не ограничительна, а условие огран. роста по дему. Единственность мы понимаем в смысле стох. эквивалентности.

Зам. Если не фиксировать σ-алгебры, то решение называется слабым. Поиск слабых решений помогает в случае липшицевых функций σ и b.

Д.-во: Единственность. Пусть X_T и Y_T – два решения диф. уравнения с одинаковыми начальными данными.

Тогда
$$X_T - Y_T = \int_0^T (b(t,X_t) - b(t,Y_t))dt + \int_0^T (\sigma(t,X_t) - \sigma(t,Y_t))dB_t$$

$$E(X_T - Y_T)^2 \le 2E\left(\left[\int_0^T (b(t,X_t) - b(t,Y_t))dt\right]^2 + \left[\int_0^T (\sigma(t,X_t) - \sigma(t,Y_t))dB_t\right]^2\right) \le$$

$$\le 2T\int_0^T E(b(t,X_t) - b(t,Y_t))^2 dt + 2\int_0^T E(\sigma(t,X_t) - \sigma(t,Y_t))^2 dt \le$$

$$\le 2TC\int_0^T E(X_t - Y_t)^2 dt. \quad (*)$$

Получим, что по лемме Гронуолла, $E(X_t - Y_t)^2 = 0$ для п. всех t.

Выберем рац. числа, стало быть, в них X_T и Y_T совп. на множестве полной меры, а значит, совпадают всюду.

Существование. Рассмотрим второй раз выражение $(*)$, получим, что $E((X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)})^2) \le 2T^2C \cdot \int_0^t E(X_t^{(n)} - X_t^{(n-1)})^2 dt$,

где $X^{(n+1)}$ – это правая часть от $X^{(n)}$. Тогда

$$E((X_t^{(n-1)} - X_t^{(n)})^2) \le \frac{C^{k+1} \cdot t^{k+1}}{(k+1)!}, \text{ т. е. } X_t^{(n)} \text{ имеет предел в } L^2,$$

ясно, что этот процесс предсказуем.

Из неравенства Дуба нетрудно получить и сходимость почти всюду.

$$\sup_{0\le t\le T} |X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}| \le \int_0^T |b(s, Y_s^{(k)}) - b(s, Y_s^{(k-1)})| ds +$$

$$+ \sup \left|\int_0^t (\sigma(s, Y_s^{(k)}) - \sigma(s, Y_s^{(k-1)}))dB_s\right|$$

Фильтр Калмана-Бьюси.

$dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dU_t$, где U_t – бр. движ.

$dZ_t = c(t, X_t)\,dt + \gamma(t, X_t)\,dV_t$, где V_t – бр. движ.

V нез. от X и U. $\quad Z_0 = 0$

Z – знаем, хотим измерить X.

Хотим найти $\hat{X}_t$, $\hat{X}_t$ изм. $\sigma(Z_t)_{t \le s}$

$\|\hat{X}_t - X_t\|_{L^2}$

$\uparrow$ L^2, порожд. U_s и V_s до момента t.

$dX_t = F(t)X_t\,dt + C(t)\,dU_t$

$dZ_t = G(t)X_t\,dt + D(t)\,dV_t$

$Z_0 = 0$

F, C, G, D – ограничены локально, D отд. от нуля

X_0 распр. гауссовом.

<u>Пример</u> $X, W_1, W_2, \ldots$ – независимы, $EX = EW_i = 0$

$EX^2 = a$, $EW_i^2 = m$

$Z_j = X + W_j$. A_j – орт. по Г.-Ш. Z_j

$$\hat{X}_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{E(XA_j)}{EA_j^2} \cdot A_j$$

$A_j = Z_j - \hat{X}_{j-1}$

$E(XA_j) = \cancel{EX} \to E(X(X - \hat{X}_{j-1})) = E((X - \hat{X}_{j-1})^2)$

$E(A_j^2) = E((X - \hat{X}_{j-1})^2) + m^2$

$\hat{X}_k - \hat{X}_{k-1} = \dfrac{E(X - \hat{X}_{k-1})^2}{E(X - \hat{X}_{k-1})^2 + m^2} \cdot (Z_k - \hat{X}_{k-1})$; $X - \hat{X}_k \perp \hat{X}_k - \hat{X}_{k-1}$, сначала считаем нач., а потом $\hat{X}_k$

$\hat{X}_k = \frac{a^2}{ka^2+m^2} \cdot (z_1 + \ldots + z_k)$ — ответ

Лемма: X и z_t — случайны, независимы. Всё это совместно гауссовское. Тогда $\hat{X}_t \in \mathcal{L}in(z_s)$

Д-во: $\exists \hat{X}$ — проекция X в L^2

$\tilde{X} = X - \hat{X}$. $(\tilde{X}, z_{t_1}, \ldots, z_{t_k})$ — гауссовский вектор

$\tilde{X}$ независимо с z_t, т.к. не коррелировано

Тогда $\tilde{X}$ орт. всем функциям от z. Тогда

$\hat{X}$ — наилучшая оценка.

Проверим, что $\begin{pmatrix} X_t \\ z_t \end{pmatrix}$ — гаусс. процесс.

$$\underbrace{d\begin{pmatrix} X_t \\ z_t \end{pmatrix}}_{M_t} = \underbrace{\begin{pmatrix} F & 0 \\ G & 0 \end{pmatrix}}_{H(t)} \begin{pmatrix} X_t \\ z_t \end{pmatrix} dt + \underbrace{\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}}_{K(t)} d\underbrace{\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}}_{B_t}$$

$$M_t^{(n+1)} = M_0 + \int_0^t H(s) M_s^{(n)} ds + \int_0^s K(t) dB_s$$

$$L_t = \mathrm{span}(z_s)_{s \le t} \oplus \{1\}$$

$$\| \{ c + \int_0^T f(t)\, dz_t,\ f \in L^2[0,t] \}$$

$$E\left(\int_0^T f(t)\, dz_t\right)^2 = E\left(\int_0^t G(t) X_t f(t) dt\right)^2 + \underbrace{E\left(\int_0^t f(t) D(t)\, dV_t\right)^2}_{\|f\|_{L^2}, \text{ т.к. } D \text{ отл. от } 0}$$

$\Downarrow$

Оператор — изоморфизм.

$$N_t = z_t - \int_0^t G(s) \hat{X}_s\, ds$$

обновляющий процесс.

1) $dN_t = dz_t - G(t)\hat{X}_t\,dt = G(t)(X_t - \hat{X}_t)\,dt + D(t)\,dV_t$

2) N_t имеет ортогональные приращения.

$$E\left(Y\cdot\int_{t_1}^{t_2} dN_t\right) = E\left(Y\cdot\int_{t_1}^{t_2} D(t)\,dV_t\right) = 0.$$

$Y \in L_{t_1}$

3) $EN_t^2 =$

$dN_t^2 = 2N_t\,dN_t + (dN_t)^2 = 2N_t\,dN_t + D^2(t)\,dt$

$= \int_0^T D^2(t)\,dt$

4) $L_t\ \mathrm{span}(N_s)_{s\le t} = \mathrm{span}(z_s)_{s\le t}$

$$c_0 + \int_0^T f(s)\,dN_s,\quad f\in L^2[0,t]$$

$$\parallel$$

$$\int_0^t f(s)\,dz_s + \int_0^t f(r)\,\underbrace{G(r)\hat{X}_r}_{c_1(r) + \int_0^r g(s,r)\,dz_s}\,dr =$$

$$= \int_0^t \underbrace{\left(f(s) - \int_s^t f(r)\,g(s,r)\,dr\right)}_{\text{Вольтерров оператор}} dz_s - \int_0^t f(r)\,c_1\,dr$$

5) N_t - гаусс.

$\frac{1}{D(t)}\,dN_t = dR_t$, тогда R_t - в.-с.

Процессы Леви.

Введение $\{X_n\}$ - iid $DX < +\infty$. Тогда $\frac{\sum X_k - \sum EX_k}{\sqrt{DX_k}} \to N(0,1)$

куда-то сходится

Хотим избавиться от условия $DX < \infty$

X_k – iid. EX_k и DX_k – не известно

$\exists\ A_n, B_n$, т.ч. $\dfrac{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - A_n}{B_n} \xrightarrow{(*)}$ куда-то, но не ноль

Ответ: 1) Распределение справа: Y

(*) Y_1 и $Y_2 = cY + d$, с некоторыми c, d.

нез.

Def Распред. Y со св. (*) называется ~~устойчивым~~ устойчивым. (stable)

Факт Устойчивые распред. параметр. α.

α-устойчивые распр., $\alpha \in (0, 2]$, $B_n \sim n^{1/\alpha}$

2) F – ф.-я распр. X_k

Сход. (*) $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \dfrac{F(-x)}{1 - F(x) + F(-x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{c_1}{c_1 + c_2} \\ \dfrac{1 - F(x) + F(-x)}{1 - F(tx) + F(-tx)} \to t^{\alpha} \end{cases}$ Gnedenko, Doeblin

для Y с $\alpha < 2$

Зам. B_n может оказаться неинвариантным.

Если B_n – инв., то условия упрощаются.

Утв. Любое устойчивое распределение является безгран. делимым.

Def р.в. X безгр. делимо, если $\forall n\ \exists$ iid $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ н.р.

$X \overset{p}{=} Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

В терминах х.ф. $\varphi(t)$: $\sqrt[n]{\varphi(t)}$ – х.ф. $\forall n$

Def Процесс Леви. X_t – càdlàg, если 3 свойства

② Одинак. распред. прир.

③ Стохастическая непр. $\forall t\ P(|X_t - X_{t-}| > \varepsilon) = 0$

Очевидные свойства: 1. Рассм. X_1 в предп. $X_0 = 0$

X_1 - случ. величина. $X_1 = X_{1/n} + (X_{2/n} - X_{1/n}) + \ldots + (X_1 - X_{\frac{n-1}{n}})$ - бесконечно делимая случ. величина.

2. $E e^{iuX_t} = e^{t\eta(u)} = (e^{\eta(u)})^t$

$$\eta(u) = -\frac{1}{2} u \cdot Au + b \cdot u + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \left(e^{iu\cdot y} - 1 - iu\cdot y \cdot \mathbb{1}_{\{|y|<1\}}\right) \nu(dy)$$

$$\nu: \int_0^a x^2 \nu(dx) < \infty$$
$$\int_a^\infty \nu(dx) < \infty.$$

Это разложение Леви-Хинчина.

(A, b, ν) - характ. пр. Леви.

Shoenberg

Пример 1. Б. д.

2. Б. д. со сносом

3. Пуассоновский процесс.

$(0, 0, \lambda\delta_1)$

4. Сложный пуасс. процесс f, X_k - iid с f.

$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$, N_t - обл. пуасс. проц.

X_t - càdlàg $\quad J_X(B) = \#\{(t, X_t - X_{t-}) \in B\}$

$B \subset [0, +\infty) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$

J_X - пуассон. случ. мера, если X_t - проц. Леви

$\nu(A) = E\left(\#\{t \in [0,1] : X_t - X_{t-} \in A\}\right)$

1) ν - радоновская мера на $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$$\int_{|x|<1} |x|^2 \nu(dx) < \infty \qquad \int_{|x|\geq 1} \nu(dx) < \infty$$

2) J_x - пуасс. случ. мера с интенсивностью $\nu(dx) \times dt$

3) $\exists\ \gamma$ - вектор, B_t - $\delta.\mathcal{F}$:

$$X_t = \gamma t + B_t + \int_{|x|\geq 1,\, s\in(0,t]} x J_X(ds \times dx) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\substack{\varepsilon\leq|x|\leq 1 \\ s'\in[0,t]}} x \left(J_x(ds\times dx) - \nu(dx)ds\right)$$

Финансовые приложения.

$[0,T]$, $N+1$ актив

$$S(t) = \begin{cases} S_0(t) \\ S_1(t) \\ \vdots \\ S_N(t) \end{cases} \qquad S : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^{N+1}$$

$(\Omega, \mathcal{F})$ - простр. всех сценариев развития

$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{s+\varepsilon}$ - поток. $\mathcal{F}_t$ - информ. о рынке к мом. вр. t.

S адапт. к $\mathcal{F}_t$

Фильтр. S - история

P - вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$

P - в нашем выборе, можем быть субъективны.

Можем задать модель как $dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt$

$$dS_t = S_i(t)\alpha_i(t)dt + S_i(t)\sigma_i(t)dW_i(t)$$

Модель Блэка-Шоулза:

$$dB(t) = rB(t)dt \qquad , r>0$$

$$dS(t) = S(t)\cdot\alpha\cdot dt + S(t)\cdot\sigma\, dW(t) \qquad \alpha\in\mathbb{R},\ \sigma>0$$

$$B(t) = B(0)\exp(rt)$$

Сделаем $r=0$

Def $\Phi: [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^{N+1}$ называется стратегией или портфелем, если это предсказуемый процесс.

Простой предсказуемый процесс

$$\Phi(t) = \varphi \cdot \mathbb{1}_{\{t=0\}} + \varphi_1 \mathbb{1}_{(T_0, T_1]}(t) + \dots + \varphi_k \mathbb{1}_{[T_k, T_{k+1}]}$$

φ_k изм. отн. $\mathcal{F}_{T_{k+1}}$, T_{k+1} – момент остановки

$V^{\Phi}(t)$ = капитал $= \sum_{i=0}^{N} \Phi_i(t) \cdot S_i(t)$

Def Портфель Φ наз. самофинансируемым, если $dV^{\Phi}(t) = \sum_{i=0}^{N} \Phi_i(t)\, dS_i(t)$

Def Модель допускает арбитраж, если $\exists$ h – самофинансируемая стратегия, т. ч.

$$V^h(0) = 0, \quad P(V^h(T) > 0) > 0, \quad P(V^h(T) \geq 0) = 1.$$

Изучаем безарбитражные модели:

Критерии безарбитража!

Def Q – вер. мера на $(\Omega, \mathcal{F})$ наз. эквив. март. мерой, если $Q \sim P$ и S_0, S_N явл. Q-март.

Th (Первая фунд. теорема финансов)

Модель безарбитражна $\Leftrightarrow$ $\exists$ эквив. март. мера.

(Schachermayer, Delbaen, 1994)

Th (Гирсанова) $(\Omega, \mathcal{F})$ W^P – одномерный винеровский отн. P, стандарт.

$\varphi \in L^2(0,T)$ $\quad \frac{dQ}{dP} = \exp\left\{ \int_0^T \varphi(s)\, dW^P(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \varphi^2(s)\, ds \right\}$, тогда

$\left(W^P(t) - \int_0^t \varphi(s)\, ds \right)_{t \in [0,T]}$ явл. Q-броун. движ.

~~$B^P(t)$~~ Формула Камерона-Мартина

$B^P(t)$ – бр. дв. отн. $\mathbb{P}$, μ^P – сдвиг, σ^P – знач. B^Q – б.д. отн. Q,

$P \sim Q \iff \sigma^P = \sigma^Q$

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\frac{\mu^P - \mu^Q}{\sigma} B^P(T) - \frac{1}{2} \frac{(\mu^P - \mu^Q)^2}{\sigma^2} T \right)$$

$dQ = \exp\left(h W^P(T) - \frac{1}{2} h^2 T\right) dP$

$W^Q(t) = W^P(t) - ht$ — Q — мартин.

$dS(t) = S(t)(\alpha + \sigma h)dt + \sigma S(t) dW^Q(t)$

$h = -\frac{\alpha}{\sigma}$

$dQ = \exp\left(-\frac{\alpha}{\sigma} W^P(t) - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\sigma^2} T\right\} dP$ ЭММ

<u>Def</u> $H: \Omega \to \mathbb{R}^+$, $\mathcal{F}_T$-измерима. H — платёжное обязательство

Простое, если $H = \Phi(S(T))$, если Φ — детерминированная

<u>Примеры</u> $H = S(T)$

$H = (S(T) - K)^+$ — колл опцион

$H = h(S(t), t \in [0,T])$

$H = \mathbb{1}_A$, A — событие

$\Pi(t, H) = ?$ — за сколько можно перепродать H

$\Pi(0, H)$

$\Pi(T, H)$

Q — ЭММ. Берем портфель $(\Pi(t,H), S_0(t), \dots, S_N(t))$

$$\Pi(t,H) = E^Q(\Pi(t,H) \mid \mathcal{F}_t) = E^Q(H \mid \mathcal{F}_t)$$

$H = \Phi(S(T))$

$\Pi(t,H) = F(t, S(t))$. Ищем F. Надо сделать

$$d(F(t, S(t))) = F_1'(t, S(t))dt + F_2'(t, S(t))\, dS(t) + \frac{1}{2} F_{22}''(t, S(t))(dS(t))^2.$$

Получим диф. ур. на F, гран. данные знаем