Как склеивать функции?

Д. М. Столяров

22 сентября 2016 г.

Аннотация

Заметка посвящена классам функций, медленно осциллирующих в среднем (в частности, функциям пространства BMO и весам Макенхаупта). В работе [10] было показано, что для двух функций на отрезке из такого класса можно подобрать третью функцию того же класса, равноизмеримую с их склейкой, если выполнено простое геометрическое условие. Этот результат влечёт локальную вогнутость определённых функций Беллмана. Мы перенесём основные результаты работы [10] на случай аналогичных классов функций на окружности и прямой. Основная идея (использование операции гомогенизации) принадлежит Ф. Л. Назарову.

1 Постановка

Мы будем работать с различными классами функций, медленно осциллирующих в среднем. Нам будет удобно пользоваться формализмом работы [4]. Пусть Ω_0 и Ω_1 — множества на плоскости, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Множества Ω_0 и Ω_1 открыты, строго выпуклы, неограничены и не совпадают со всей плоскостью.
2. Имеет место включение $\mathrm{cl}\Omega_1 \subset \Omega_0$; максимальные вписанные конусы множеств Ω_0 и Ω_1 совпадают.
3. Граница множества Ω_1 дважды непрерывно дифференцируема.

Область $\mathrm{cl}\Omega_0 \setminus \Omega_1$ обозначим символом Ω. Следуя работе [11], мы будем называть области такого типа линзами. Также введём обозначение $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega = \partial\Omega_0$ для жёсткой границы множества Ω и $\partial_{\mathrm{free}}\Omega = \partial\Omega_1$ для свободной.

Определение 1. *Пусть I — отрезок на прямой. Будем говорить, что суммируемая*[1] *функция $\varphi\colon I \to \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ медленно осциллирует в среднем, если имеет место включение $\langle\varphi\rangle_J \in \Omega$ для всякого подотрезка $J \subset I$. Класс медленно осциллирующих в среднем функций обозначим символом $\boldsymbol{A}_\Omega$.*

Здесь и в дальнейшем, символ $\langle\psi\rangle_E$ обозначает величину $\frac{\int_E \psi}{|E|}$ — среднее суммируемой функции ψ по измеримому множеству E. В работе [10] была доказано следующее утверждение.

Предложение 1 (Следствие 3.13 работы [10])**.** *Для всякой пары функций φ_+, φ_- класса $\boldsymbol{A}_\Omega$, таких что $[\langle\varphi_+\rangle_I, \langle\varphi_-\rangle_I] \subset \Omega$, и всякой пары неотрицательных чисел α_+, α_-, таких что $\alpha_+ + \alpha_- = 1$, найдётся функция $\varphi \in \boldsymbol{A}_\Omega$, такая что для всякого множества $E \subset \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ выполнено равенство*

$$\Big|\Big\{t \in I \;\Big|\; \varphi(t) \in E\Big\}\Big| = \alpha_+\Big|\Big\{t \in I \;\Big|\; \varphi_+(t) \in E\Big\}\Big| + \alpha_-\Big|\Big\{t \in I \;\Big|\; \varphi_-(t) \in E\Big\}\Big|.$$

[1] Все функции и множества в этой заметке измеримы.

Иными словами, распределение функции φ совпадает с распределением склейки функций φ_+ и φ_- в соответствующей пропорции. Это предложение заменяет собой формально неверный принцип: если функции φ_+ и φ_-, заданые на отрезке $[0,1]$, медленно осциллируют в среднем, и выполнено геометрическое условие $[\langle\varphi_+\rangle_I, \langle\varphi_-\rangle_I] \subset \Omega$, то функция

$$\varphi\colon [0,1] \to \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_+(\alpha_+^{-1}x), & x \in [0,\alpha_+); \\ \varphi_-(1-\alpha_-^{-1}(1-x)), & x \in [\alpha_+,1], \end{cases}$$

медленно осциллирует в среднем. Определённая выше склейка не обязательно принадлежит классу $\boldsymbol{A}_\Omega$, эта функция может иметь слишком большой скачок в точке α_+ (отметим, что функции медленной средней осцилляции не могут иметь слишком больших скачков). Предложение 1 утверждает, что существует функция, равноизмеримая со склейкой, и принадлежащая чуть классу $\boldsymbol{A}_\Omega$. На самом деле, верен более сильный факт: функция, равноизмеримая со склейкой, и принадлежащая чуть классу $\boldsymbol{A}_\Omega$, может быть выбрана монотонной.

Введём в рассмотрение ещё один класс функций. Пусть $\mathbb{T}$ — окружность, снабжённая вероятностной мерой Лебега. Функции на окружности можно интерпретировать как 1-периодические функции на прямой. Соответствующую функции φ на окружности 1-периодическую функцию на прямой обозначим символом $\varphi_{\text{пер.}}$

Определение 2. *Будем говорить, что функция $\varphi\colon \mathbb{T} \to \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ медленно осциллирует в среднем, если для всякого отрезка $J \subset \mathbb{R}$ выполнено включение $\langle\varphi_{\text{пер.}}\rangle_J \in \Omega$. Класс медленно осциллирующих в среднем функций на окружности обозначим символом $\boldsymbol{A}_\Omega^\circ$.*

Нетрудно видеть, что

$$\boldsymbol{A}_\Omega^\circ \hookrightarrow \boldsymbol{A}_\Omega \tag{1}$$

посредством сужения функций $\varphi_{\text{пер.}}$ на отрезок $[0,1]$. Это вложение не покрывает класс $\boldsymbol{A}_\Omega$ (например, функция φ, стремящаяся к $-\infty$ на левом конце интервала и к $+\infty$ на правом, таким вложением не накрывается).

Оказывается, что функции на окружности тоже можно склеивать. Для этого нам потребуется определение расширения области Ω.

Определение 3. *Множество $\tilde\Omega \subset \mathbb{R}^2$ называется расширением линзы Ω если $\tilde\Omega = \mathrm{cl}\Omega_0 \setminus \tilde\Omega_1$, где множество $\tilde\Omega_1$ удовлетворяет тем же условиям, что и множество Ω_1 (таким образом, $\tilde\Omega$ — линза), и выполнено включение $\mathrm{cl}\tilde\Omega_1 \subset \Omega_1$.*

Предложение 2. *Для всякого расширения $\tilde\Omega$ области Ω, всякой пары ограниченных функций φ_+, φ_- класса $\boldsymbol{A}_\Omega^\circ$, таких что $[\langle\varphi_+\rangle_{\mathbb{T}}, \langle\varphi_-\rangle_{\mathbb{T}}] \subset \Omega$, найдётся функция $\varphi \in \boldsymbol{A}_{\tilde\Omega}^\circ$, такая что для всякого множества $E \subset \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ выполнено равенство*

$$\Big|\big\{t \in I \,\big|\, \varphi(t) \in E\big\}\Big| = \frac{1}{2}\Big|\big\{t \in I \,\big|\, \varphi_+(t) \in E\big\}\Big| + \frac{1}{2}\Big|\big\{t \in I \,\big|\, \varphi_-(t) \in E\big\}\Big|. \tag{2}$$

Автору неизвестно, является ли необходимым требование ограниченности склеиваемых функций. Так как достижению наших целей это требование не мешает, мы не будем от него избавляться. Кроме того, мы склеиваем функции лишь в пропорции 1 : 1, а не в произвольной: заинтересованый читатель легко изменит рассуждение, чтобы получить соответствующий результат.

Ключевое для данной работы предложение 2 было сообщено автору Ф. Л. Назаровым после доклада результатов работы [10]. Я благодарен Ф. Л. Назарову за это. Также выражаю благодарность П. Б. Затицкому и В. И. Васюнину за ценные замечания.

2 Доказательство предложения 2

Основная роль в доказательстве предложения 2 принадлежит операции гомогенизации функций. Сначала определим пересадку функции с отрезка на отрезок.

Определение 4. *Пусть φ — функция на отрезке $I = [i_1, i_2]$. Функция $\varphi_{I\to J}$ на отрезке $J = [j_1, j_2]$, заданая по правилу*

$$\varphi_{I\to J}(x) = \varphi\Big((x - j_1)\frac{i_2 - i_1}{j_2 - j_1} + i_1\Big), \quad x \in J,$$

называется пересадкой функции φ на отрезок J.

Определение 5. *Пусть $\lambda \in (0,1)$. Сопоставим этому числу разбиение отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ на подотрезки:*

$$I_{k,\pm} = \Big[\pm\frac{1-\lambda^{k-1}}{2}, \pm\frac{1-\lambda^k}{2}\Big], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть φ — функция на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Функция $\Gamma_\lambda[\varphi]$, называемая λ-гомогенизацией функции φ, задана на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ согласно правилу

$$\Gamma_\lambda[\varphi] = \varphi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\to I_{k,\pm}} \text{ на отрезке } I_{k,\pm}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Если φ — функция на окружности, то её λ-гомогенизация определяется как периодическое продолжение функции $\Gamma_\lambda[\varphi_{\text{пер.}}|_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}]$.

Отметим, что $\Gamma_\lambda[\varphi]$ имеет ту же функцию распределения, что и φ:

$$\forall E \subset \partial_{\text{fixed}}\Omega \qquad \Big|\Big\{t \in \Big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big] \;\Big|\; \varphi(t) \in E\Big\}\Big| = \Big|\Big\{t \in \Big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big] \;\Big|\; \Gamma_\lambda[\varphi](t) \in E\Big\}\Big|.$$

Кроме того, нам будет удобно продолжить разбиение $\{I_{k,\pm}\}$ периодически на всю прямую. Наиболее важное свойство этого разбиения — то что длина соседних отрезков отличается не более, чем в λ раз.

Лемма 1. *Пусть функция φ на окружности ограничена и медленно осциллирует в среднем. Для всякого расширения $\tilde{\Omega}$ линзы Ω существует число $\lambda(\tilde{\Omega}, \varphi) \in (0,1)$, такое что функция $\Gamma_\lambda[\varphi]$ принадлежит классу $\boldsymbol{A}^{\circ}_{\tilde{\Omega}}$ при всяком $\lambda \in (\lambda(\tilde{\Omega}, \varphi), 1)$.*

Доказательство. Согласно определению 2, надобно показать, что для всякого отрезка $J \subset \mathbb{R}$ выполнено включение

$$\langle \Gamma_\lambda[\varphi]\rangle_J \subset \tilde{\Omega}. \tag{3}$$

Будем рассматривать длинные и короткие отрезки J раздельно. Пусть r — некоторое положительное число, которое мы выберем впоследствие. Будем говорить, что отрезок J является r-длинным, если он накрывает хотя бы r отрезков $I_{k,\pm}$ целиком (напомним, что мы продолжили разбиение $\{I_{k,\pm}\}$ периодически на всю прямую). В противном случае назовём отрезок J r-коротким.

Прежде чем переходить к рассмотрению случаев, обозначим компакт, содержащий множество значений функции φ, символом K. Не умаляя общности, можно считать множество K выпуклым. Символом x обозначим точку $\langle\varphi\rangle_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$.

Случай r-длинного отрезка. Пусть концы отрезка J принадлежат отрезкам $I_{k,\pm}$ и $I_{l,\pm}$. Пусть $\tilde{J} = J \setminus (I_{k,\pm} \cup I_{l,\pm})$. В таком случае,

$$\langle \Gamma_\lambda[\varphi]\rangle_J = \frac{|\tilde{J}|}{|J|}x + \frac{|J \cap I_{k,\pm}|}{|J|}\langle\varphi\rangle_{J\cap I_{k,\pm}} + \frac{|J \cap I_{l,\pm}|}{|J|}\langle\varphi\rangle_{J\cap I_{l,\pm}}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, используя основное свойство нашего разбиения, что

$$\frac{|J\cap I_{k,\pm}|}{|J|}+\frac{|J\cap I_{l,\pm}|}{|J|}\leqslant\frac{2}{1+\sum\limits_{j=1}^{r-1}\lambda^j}.$$

Таким образом, равенство (4) показывает, что

$$\langle\Gamma_\lambda[\varphi]\rangle_J=\alpha_+x+\alpha_-y,\quad \alpha_++\alpha_-=1,\alpha_\pm\geqslant 0,\tag{5}$$

где точка y лежит в компакте K, $\alpha_-\leqslant\frac{2-2\lambda}{2-\lambda-\lambda^r}$. Последнее число стремится к $2/r$ когда $\lambda\to 1$. Стало быть, выбирая число r достаточно большим, мы можем гарантировать условие (3) для всех r-длинных интервалов, полагая число $1-\lambda$ достаточно маленьким.

Случай r-короткого отрезка. Пусть J — r-короткий отрезок. Он покрывает $s<r$ отрезков разбиения $I_{k,\pm}$ (покрытые отрезки назовём I_{k_j}), два крайних из которых могут быть накрыты не полностью. Мы можем расписать среднее по отрезку J как выпуклую комбинацию средних по отрезкам разбиения:

$$\langle\Gamma_\lambda[\varphi]\rangle_J=\sum_{j=1}^{s}\frac{|I_{k_j}\cap J|}{|J|}\langle\varphi\rangle_{I_{k_j}\cap J}.\tag{6}$$

Растянем теперь все отрезки I_{k_j} так, чтобы они имели одинаковую длину (и при этом соседние отрезки по прежнему были соседними). Отметим, что соотношения между длинами отрезков изменились не более, чем в λ^{-r} раз. Отрезок J при этом перешёл в некоторый отрезок $\tilde{J}$. Пересадив функцию φ на растянутые отрезки, мы можем написать аналог равенства (6) для среднего уже функции φ по отрезку $\tilde{J}$. Средние функций в правых частях равенства (6) и его аналога не отличаются, а коэффициенты изменятся не более, чем в λ^{-r} раз. Стало быть, если число λ достаточно близко к единице, то точка $\langle\Gamma_\lambda[\varphi]\rangle_J$ лежит на расстоянии не более чем $s(1-\lambda^r)\operatorname{diam}K$ от $\langle\varphi\rangle_{\tilde{J}}$. Это означает, что включение (3) выполнено, если λ достаточно близко к единице (при фиксированном числе r).

Как выбрать параметры r и λ. Сначала мы выбираем число r настолько большим, чтобы из условия (5) при $y\in K$ и $\alpha^-<\frac{1}{r}$ следовало, что $\langle\Gamma_\lambda[\varphi]\rangle_J\in\tilde{\Omega}$, и фиксируем его. После чего выбираем число λ столь близким к единице, чтобы, во-первых, выполнялось неравенство $\frac{2-2\lambda}{2-\lambda-\lambda^r}\geqslant\frac{1}{r}$, во-вторых, чтобы число $r(1-\lambda^r)\operatorname{diam}K$ было меньше, чем расстояние между $\tilde{\Omega}_1$ и $K\cap\Omega$. $\square$

Доказательство предложения 2. Рассмотрим функцию φ, заданую по формуле

$$\varphi(x)=\begin{cases}\Gamma_\lambda[\varphi_+](x-\frac{1}{2}-2k) & x\in[2k,2k+1),k\in\mathbb{Z};\\ \Gamma_\lambda[\varphi_-](x+\frac{1}{2}-2k) & x\in[2k-1,2k),k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

(Эта функция периодична с периодом 2, чтобы получить 1-периодичную функцию, надо сделать сжатие в 2 раза). Так как операция λ-гомогенизации не меняет распределение функции, построенная таким образом функция φ удовлетворяет равенству (2). Как и в доказательстве леммы 1, нам надо показать, что $\langle\varphi\rangle_J\in\tilde{\Omega}$ для всякого отрезка $J\subset\mathbb{R}$. По сути, рассуждение полностью аналогично приведённому в доказательстве леммы 1. Случай r-коротких отрезков ничем не отличается (потому что короткие отрезки по сути усредняют одну из функций $\Gamma_\lambda[\varphi_+]$ и $\Gamma_\lambda[\varphi_-]$). Что же касается r-длинных отрезков, то единственное отличие — это то, что на полностью накрытых отрезком J отрезках разбиения может присутствовать как функция $\Gamma_\lambda[\varphi_+]$, так и $\Gamma_\lambda[\varphi_-]$. Стало быть, формула (5) остаётся в силе вместе с неравенством $\alpha_-\leqslant\frac{1-\lambda}{2-\lambda-\lambda^{r-1}}$, лишь точка x заменяется на некоторую точку отрезка $[\langle\varphi_+\rangle_{\mathbb{T}},\langle\varphi_-\rangle_{\mathbb{T}}]$, которая по условию предложения лежит в области Ω. $\square$

3 Абстрактное следствие

Для технических целей нам понадобится ввести "открытые" классы $\boldsymbol{A}^\circ$, т.е. аналоги классов $\boldsymbol{A}^\circ$, определённые на открытых областях.

Определение 6. *Будем говорить, что семейство* $\{\Omega^\alpha\}_{\alpha\in(0,1]}$ *есть поток линз, если*

- *Для всякого числа* $\alpha \in (0,1]$ *множество* Ω^α *есть линза,*
- *Для всяких чисел* $\alpha, \beta \in (0,1]$, $\beta > \alpha$, *линза* Ω^β *есть расширение линзы* Ω^α,
- *Для всякого числа* α
$$\Omega_\alpha \setminus \partial_{\mathrm{free}}\Omega_\alpha = \cup_{\beta<\alpha}\Omega_\beta.$$

Потоки линз возникают естественным образом при рассмотрении примеров (речь о которых пойдёт позже). Отметим, что все линзы потока имеют одну и ту же жёсткую границу (это следует из второго свойства). Нетрудно видеть, что для всякой линзы Ω существует поток, заканчивающийся на ней, т.е. поток $\{\Omega^\alpha\}_\alpha$, такой что $\Omega^1 = \Omega$.

Определение 7. *Пусть* $\{\Omega^\alpha\}$ *— поток линз, заканчивающийся на линзе* Ω. *Будем говорить, что функция* $\varphi\colon \mathbb{T} \to \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ *принадлежит классу* $\boldsymbol{A}^\circ_{\Omega,\text{откр.}}$, *если* $\varphi \in \boldsymbol{A}^\circ_{\Omega^\alpha}$ *при некотором* $\alpha < 1$.

Пусть f — некоторая функция на множестве $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$. Пока что будем считать, что $f \geqslant 0$. Рассмотрим функцию Беллмана[2]

$$\boldsymbol{B}^\circ(x;\Omega,f) = \sup\Big\{\langle f(\varphi)\rangle_{\mathbb{T}}\;\Big|\;\langle\varphi\rangle_{\mathbb{T}} = x, \varphi \in \boldsymbol{A}^\circ_{\Omega,\text{откр.}} \cap L_\infty(\mathbb{T})\Big\},\quad x \in \Omega. \tag{7}$$

Эта функция естественным образом определена на области $\Omega \setminus \partial_{\mathrm{free}}\Omega$ и удовлетворяет граничным условиям $\boldsymbol{B}^\circ(x) = f(x)$ при $x \in \partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$. Как обычно, мы не будем указывать зависимость функции от области и граничного данного[3], если эта зависимость не меняется.

Следствие 1. *Функция* $\boldsymbol{B}^\circ$ *локально вогнута на области* $\Omega \setminus \partial_{\mathrm{free}}\Omega$.

Доказательство. Следствие выводится из предложения 2 стандартным образом (восходящим к [2]).

Пусть $x = \frac12 x_+ + \frac12 x_-$ и отрезок $[x_+, x_-]$ также лежит в области Ω. Мы должны показать неравенство
$$\boldsymbol{B}^\circ(x) \geqslant \frac{\boldsymbol{B}^\circ(x_+) + \boldsymbol{B}^\circ(x_-)}{2}.$$
Зафиксируем число $\eta > 0$. Пусть φ_+ и φ_- — ограниченые функции класса $\boldsymbol{A}^\circ_{\Omega,\text{откр.}}$, такие что
$$\langle\varphi_\pm\rangle_{\mathbb{T}} = x_\pm,\quad \langle f(\varphi_\pm)\rangle_{\mathbb{T}} \geqslant \boldsymbol{B}^\circ(x_\pm) - \eta.$$
Пусть $\varphi_+ \in \boldsymbol{A}_{\Omega^{\alpha_+}}, \varphi_- \in \boldsymbol{A}_{\Omega^{\alpha_-}}$, $\alpha_\pm < 1$. Выберем число $\alpha \in (\max(\alpha_+,\alpha_-),1)$ и построим функцию $\varphi \in \boldsymbol{A}^\circ_{\Omega^\alpha}$ при помощи предложения 2. Отметим, что равенство (2) гарантирует $\langle\varphi\rangle_{\mathbb{T}} = x$ и
$$\boldsymbol{B}^\circ(x) \geqslant \langle f(\varphi)\rangle_{\mathbb{T}} \overset{(2)}{=} \frac12\langle f(\varphi_+)\rangle_{\mathbb{T}} + \frac12\langle f(\varphi_-)\rangle_{\mathbb{T}} \geqslant \frac{\boldsymbol{B}^\circ(x_+) + \boldsymbol{B}^\circ(x_-)}{2} - \eta.$$
Устремляя параметр η к нулю, получаем требуемое неравенство. □

[2]Обычно функция Беллмана определена на всей линзе. Тем не менее, для функций на окружности такая, определённая классическим способом функция Беллмана, не будет локально вогнутой, так как функции $\varphi \in \boldsymbol{A}^\circ_\Omega$, такие что $\langle\varphi\rangle_{\mathbb{T}} \in \partial_{\mathrm{free}}\Omega$, могут принимать только два значения — равные концам хорды, касающейся свободной границы в точке $\langle\varphi\rangle_{\mathbb{T}}$.

[3]Неявным образом функция $\boldsymbol{B}^\circ$ зависит от выбора потока линз, однако, как будет доказано в дальнейшем, эта зависимость отсутствует; пока что мы просто считаем поток фиксированным раз и навсегда.

Рассмотрим теперь более классическую версию функции Беллмана, которая работает с функциями на отрезке (пусть это будет отрезок $[0,1]$):

$$\boldsymbol{B}_{\text{отр.}}(x;\Omega,f)=\sup\Big\{\langle f(\varphi)\rangle_{[0,1]}\;\Big|\;\langle\varphi\rangle_{[0,1]}=x,\varphi\in\boldsymbol{A}_\Omega\Big\},\quad x\in\Omega. \tag{8}$$

В работе [10] (основная теорема) было доказано, что функция $\boldsymbol{B}_{\text{отр.}}$ есть наименьшая среди всех локально вогнутых функций G на Ω, удовлетворяющих граничному условию $G=f$ на множестве $\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$. Из этой теоремы и следствия 1 вытекает неравенство

$$\forall\alpha<1\qquad\boldsymbol{B}_{\text{отр.}}(x;\Omega^\alpha)\leqslant\boldsymbol{B}^\circ(x;\Omega),\quad x\in\Omega^\alpha$$

(как и раньше, $\{\Omega^\alpha\}_\alpha$ — некоторый поток линз, заканчивающийся на линзе Ω). С другой стороны, вложение (1) гарантирует неравенство

$$\boldsymbol{B}^\circ(x;\Omega)\leqslant\boldsymbol{B}_{\text{отр.}}(x;\Omega),\quad x\in\Omega\setminus\partial_{\mathrm{free}}\Omega.$$

Следствие 2. *Пусть*

$$\boldsymbol{B}_{\text{отр.}}(x;\Omega)=\sup_{\alpha\in(0,1]}\boldsymbol{B}_{\text{отр.}}(x,\Omega^\alpha) \tag{9}$$

для некоторой точки $x\in\Omega\setminus\partial_{\mathrm{free}}\Omega$. Тогда $\boldsymbol{B}^\circ(x;\Omega)=\boldsymbol{B}_{\text{отр.}}(x;\Omega)$.

Условие непрерывности функции Беллмана по потоку линз очень естественно, не известно примеров, когда бы оно не выполнялось.

Гипотеза 1. *Пусть функция f непрерывна. Тогда условие* (9) *выполнено для каждой точки $x\in\Omega\setminus\partial_{\mathrm{free}}\Omega$.*

Определение 8. *Будем говорить, что функция $\varphi\colon\mathbb{R}\to\partial_{\mathrm{fixed}}\Omega$ медленно осциллирует в среднем, если для всякого отрезка $J\subset\mathbb{R}$ выполнено включение $\langle\varphi\rangle_J\subset\Omega$. Класс медленно осциллирующих в среднем функций на прямой обозначим символом $\boldsymbol{A}_\Omega^{\mathbb{R}}$.*

Нетрудно видеть, что $\boldsymbol{A}_\Omega^\circ\subset\boldsymbol{A}_\Omega^{\mathbb{R}}$. Кроме того, $\boldsymbol{A}_\Omega^{\mathbb{R}}\hookrightarrow\boldsymbol{A}_\Omega$ посредством сужения функций φ на отрезок $[0,1]$. Определим функцию Беллмана для функций на вещественной прямой.

$$\boldsymbol{B}_{\mathbb{R}}(x;\Omega,f)=\sup\Big\{\langle f(\varphi)\rangle_{[0,1]}\;\Big|\;\langle\varphi\rangle_{[0,1]}=x,\varphi\in\boldsymbol{A}_\Omega^{\mathbb{R}}\Big\},\quad x\in\Omega. \tag{10}$$

Следствие 3. *Пусть условие* (9) *выполнено для некоторой точки $x\in\Omega\setminus\partial_{\mathrm{free}}\Omega$. Тогда $\boldsymbol{B}_{\mathbb{R}}(x;\Omega)=\boldsymbol{B}_{\text{отр.}}(x;\Omega)$.*

4 Пример

Пространство $\mathrm{BMO}^p_{\text{отр.}}$ на отрезке задаётся полунормой

$$\|\psi\|_{\mathrm{BMO}^p_{\text{отр.}}}=\sup_{J\subset[0,1]}\Big(\langle|\psi-\langle\psi\rangle_J|^p\rangle_J\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Шар этого пространства радиуса ε обозначим символом $\mathrm{BMO}^p_\varepsilon$. Рассмотрим функцию Беллмана (теперь f — функция на прямой)

$$\boldsymbol{B}_{\text{отр.}}(x;\mathrm{BMO}^2_\varepsilon)=\sup\Big\{\langle f(\psi)\rangle_{[0,1]}\;\Big|\;\langle\psi\rangle_{[0,1]}=x_1,\langle\psi^2\rangle_{[0,1]}=x_2,\psi\in\mathrm{BMO}^2_\varepsilon\Big\}.$$

В работе [4] объясняется, как эта функция Беллмана записывается в виде (8) (соответствующая линза есть область между двумя параболами, иными словами, параболическая полоса). Мы можем рассмотреть версии пространства BMO на окружности и прямой:

$$\|\psi\|_{\mathrm{BMO}^p_{\mathbb{R}}} = \sup_{J\subset\mathbb{R}} \Big(\langle|\psi - \langle\psi\rangle_J|^p\rangle_J\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad \psi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},$$

$$\|\psi\|_{\mathrm{BMO}^p_{\mathbb{T}}} = \sup_{J\subset\mathbb{R}} \Big(\langle|\psi_{\text{пер.}} - \langle\psi_{\text{пер.}}\rangle_J|^p\rangle_J\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad \psi\colon \mathbb{T}\to\mathbb{R},$$

и определить функции Беллмана на них аналогично (7) и (10).

Следствие 4. *Функции Беллмана для случаев* $f(t) = e^{\lambda t}$, $f(t) = |t|^p$, $p > 0$, *и* $f(t) = \chi_{(\lambda,+\infty)}$ *совпадают в случаях окружности, прямой и отрезка.*

Чтобы получить это следствие, надо лишь проверить условие (9) непрерывности семейства функций Беллмана по потоку (отметим, что область, т.е. параболическая полоса, обладает естественным потоком областей, соответствующих шарам пространства BMO^2 радиуса ε). Мы оставляем эту рутинную работу читателю, формулы для соответствующих функций Беллмана могут быть найдены в работе [5] (где неявно доказана гипотеза о непрерывности функции Беллмана по потоку линз в частном случае потока параболических полос). Изначально они были получены в работах [6] и [13] (см. также [8]), [9], [12] и [14] соответственно. Следствие 4, в частности, означает, что точные константы в различных формах неравенства Джона–Ниренберга не меняются при замене отрезка на окружность или прямую.

Используя обратный трюк Славина (см. [7], [1] и [3]), можно показать, что точные константы в интегральной форме неравенства Джона–Ниренберга на пространстве BMO^p, $p \in [1,\infty)$, также не меняются при переходе от отрезка к окружности или прямой.

Отметим, что аналогичный принцип верен и для обратного неравенства Гёльдера для классов Макенхаупта: этому неравенству также соответствует задача на нахождение минимальной вогнутой на линзе функции (см. [4]).

Можно рассмотреть классы функций на окружности, подобные введённым в определении 2, с той разницей, что рассматриваются лишь средние функции $\varphi_{\text{пер.}}$ по отрезкам длины не более единицы (что соответствует усреднению по всем геометрическим дугам окружности). Нетрудно видеть, что аналогично построенные функции Беллмана на таких классах совпадают со всеми остальными (потому что такой "геометрический" класс функций вкладывается в $\boldsymbol{A}$ посредство формулы (1) и содержит класс $\boldsymbol{A}^\circ$).

Список литературы

[1] В. Васюнин, Л. Славин, *Константа Джона–Ниренберга для пространства* $\mathrm{BMO}^p, p > 2$, Алгебра и Анализ, **28**:2 (2016), 72–96.

[2] D. Burkholder, *Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms*, Ann. Prob. **12**:3 (1984), 647–702.

[3] A. A Logunov, L. Slavin, D. M. Stolyarov, V. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Weak integral conditions for* BMO, Proc. AMS **143** (2015), 2913–2926.

[4] P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Sharp estimates of integral functionals on classes of functions with small mean oscillation*, Comptes Rendus Mathematique **353**:12 (2015), 1081–1085.

[5] P. Ivanisvili, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in* BMO II: *evolution*, to appear in Memoirs AMS.

[6] L. Slavin, *Bellman function and* BMO, Ph.D. thesis, Michigan State University, 2004.

[7] L. Slavin, *The John–Nirenberg constant of* BMO^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$, arXiv:1506.04969.

[8] L. Slavin, V. Vasyunin, *Sharp results in the integral-form John–Nirenberg inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. **363**:8 (2011), 4135–4169.

[9] L. Slavin and V. Vasyunin, *Sharp* L^p *estimates on* BMO, Ind. Univ. Math. J. **61** (2012), 1051–1110.

[10] D. M. Stolyarov, P. B. Zatitskiy, *Theory of locally concave functions and its applications to sharp estimates of integral functionals*, Advances in Mathematics **291** (2016), 228–273.

[11] D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Monotonic rearrangements of functions with small mean oscillation*, Studia Mathematica **231**:3 (2015), 257–268.

[12] V. Vasyunin, *Sharp constants in the classical weak form of the John–Nirenberg inequality*, PDMI preprint, **10**, 2011.

[13] V. Vasyunin, *Sharp constant in the John–Nirenberg inequality*, PDMI preprint **20**, 2003.

[14] V. Vasyunin, A. Volberg, *Sharp constants in the classical weak form of the John-Nirenberg inequality*, Proc. Lond. Math. Soc. **108**:6 (2014), 1417–1434.