Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 478, 2019 г.

А. И. Генералов, А. В. Семенов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР КВАТЕРНИОННОГО ТИПА. IV: АЛГЕБРА КОГОМОЛОГИЙ ДЛЯ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ АЛГЕБР

§1. Введение

Работа посвящена исследованию когомологий Хохшильда некоторого семейства алгебр кватернионного типа. Ранее алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ была вычислена для одного семейства локальных алгебр кватернионного типа, содержащего, в частности, групповые алгебры обобщённых групп кватернионов над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 [1], а также для алгебр семейства $Q(2\mathcal{B})_1$ [2–4]. Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления (см. [5]). Ввиду результатов работы [6] описание алгебры когомологий $\mathrm{HH}^*(R)$ для семейств, исследованных в [2–4], доставляет одновременно описание алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для всех семейств кватернионного типа из классификации [5], содержащих алгебры с двумя простыми модулями (над алгебраически замкнутым полем произвольной характеристики). В настоящей работе мы вычисляем алгебру $\mathrm{HH}^*(R)$ для ещё одного семейства локальных алгебр кватернионного типа из классификации [5], возникающего только в характеристике 2 (потому мы их назвали “исключительными”).

Методы вычисления алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, применённые в этой работе, ранее были использованы для некоторых серий алгебр диэдрального и полудиэдрального типов из классификации К. Эрдман; см. [7–22]. Эти

Ключевые слова: локальные алгебры кватернионного типа, когомологии Хохшильда.

Первый из авторов благодарит грант РФФИ 18-31-20004 мол_а_вед за поддержку. Второй из авторов благодарит за поддержку программу социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпромнефть”.

же методы были также применены к другим семействам алгебр: самоинъективным алгебрам конечного типа представления [23–33], алгебрам Лю–Шульца [34], целочисленным групповым кольцам диэдральных и полудиэдральных групп [35, 36].

Для проведения соответствующих вычислений мы сначала строим минимальную проективную (= свободную) 4-периодическую резольвенту (единственного) простого модуля над алгеброй R из рассматриваемого семейства. Затем она используется для построения (также 4-периодической) бимодульной резольвенты алгебры R. Используя эту бимодульную резольвенту мы сначала вычисляем группы когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^n(R)$, а затем и умножения в алгебре когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$.

Кратко опишем структуру работы. В §2 приводятся формулировки основных результатов работы. §3 посвящён построению как вспомогательной резольвенты простого R-модуля, так и минимальной проективной (= свободной) бимодульной резольвенты для алгебр исследуемого семейства. В §4 вычисляются группы когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ для рассматриваемых алгебр, а в §5 мы получаем описание мультипликативной структуры алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ в терминах образующих и соотношений. Кроме того, в приложении (см. §6) мы для полноты приводим описание алгебры Йонеды для рассматриваемых локальных алгебр (которое было получено с использованием минимальной проективной резольвенты простого R-модуля).

§2. Формулировка основного результата

Пусть R – конечномерная K-алгебра над алгебраически замкнутым полем K, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R). *Алгебра когомологий Хохшильда* – это линейное пространство

$$\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{HH}^n(R) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R),$$

снабжённое $\smile$-произведением. Алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ является градуированно коммутативной [37]; кроме того, $\smile$-произведение на $\mathrm{HH}^*(R)$ совпадает с произведением Йонеды на Ext-алгебре $\bigoplus\limits_{n \geqslant 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ Λ-модуля R [38, стр. 120].

Пусть теперь K – алгебраически замкнутое поле характеристики 2, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, и $c, d \in K$. Определим K-алгебру $R_{k,c,d} := K\langle X, Y\rangle/I$, где I – идеал свободной алгебры $K\langle X, Y\rangle$, порождённый элементами

$$X^2 + Y(XY)^{k-1} + c(XY)^k,\ Y^2 + X(YX)^{k-1} + d(XY)^k,\\ (XY)^k + (YX)^k,\ X(YX)^k,\ Y(XY)^k.$$

Образы элементов X, Y относительно канонического гомоморфизма из $K[X, Y]$ в $R_{k,c,d}$ обозначаем через x и y соответственно. Алгебра $R_{k,c,d}$ – симметрическая локальная алгебра, имеющая ручной тип представления [5, III.1.2]; кроме того, в терминах [5, Ch.VII] алгебра $R_{k,c,d}$ – это алгебра кватернионного типа. Поскольку алгебра $\mathrm{HH}^*(R_{k,c,d})$ полностью описана для случая $c = 0 = d$ (и любой характеристики $\operatorname{char} K$), то далее считаем $(c, d) \neq (0, 0)$. Более того, так как $R_{k,c,d} \simeq R_{k,d,c}$, можем всюду считать, что $d \neq 0$.

Для описания алгебры когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр $R := R_{k,c,d}$ мы построим некоторые градуированные алгебры.

Пусть

$$\mathcal{X}_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4, z, e\}. \tag{2.1}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_1]$ введём градуировку так, что

$$\left.\begin{aligned} &\deg p_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant 4; \quad \deg u_j = 1,\ 1 \leqslant j \leqslant 3;\\ &\deg v_m = 2,\ 1 \leqslant m \leqslant 4; \quad \deg z = 3, \quad \deg e = 4. \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Предположим, что $c \neq 0$ и определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_1 = K[\mathcal{X}_1]/I_1$, где идеал I_1 порождён следующими элементами:
— степени 0:

$$\left.\begin{aligned} &p_1^k,\ p_2^2,\ p_3^2,\ p_4^2,\\ &p_ip_j \ \text{ для } \ i \neq j; \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

— степени 1:

$$c^2p_3u_1 + cdp_1u_1 + d^2p_2u_1 + (c^3 + d^3)p_1^{k-2}u_2,\ p_1^2u_1,\ p_1^{k-1}u_2, \tag{2.4}$$

$$p_iu_3 \ \text{ для } \ i \in \{1, 2, 3, 4\};\ p_2u_2,\ p_3u_2,\ p_4u_2; \tag{2.5}$$

— степени 2:

$$p_1v_1 + p_2v_2,\ p_1v_1 + p_3v_3,\ p_1v_1 + p_4v_4, \tag{2.6}$$

$$p_3v_1 + p_2v_3,\ p_3v_1 + p_1v_2, \tag{2.7}$$

$$p_2v_1,\ p_4v_1,\ p_3v_2,\ p_4v_2,\ p_4v_3, \tag{2.8}$$

$$cp_3v_1 + dp_1v_1,\ \ p_1v_4,\ p_2v_4,\ p_3v_4, \tag{2.9}$$

$$p_1^{k-1}v_3,\ u_2^2,\ u_2u_3,\ u_3^2, \tag{2.10}$$

$$(c^3 + d^3)u_1u_3 + c^2p_4u_1^2, \tag{2.11}$$

$$p_1v_1 + c^{-1}u_1u_3,\ \ p_1u_1^2,\ u_1u_2; \tag{2.12}$$

— степени 3:

$$p_iz \ \text{ для } \ i \in \{2, 3, 4\}, \tag{2.13}$$

$$u_2v_3 + p_1z,\ u_3v_4 + p_1^{k-1}z, \tag{2.14}$$

$$u_2v_1,\ u_2v_2,\ u_2v_4,\ u_3v_1,\ u_3v_2,\ u_3v_3, \tag{2.15}$$

$$c^2u_1v_1 + cdu_1v_3 + d^2u_1v_2 + (c^3 + d^3)p_1^{k-2}z, \tag{2.16}$$

$$(c^3 + d^3)u_1v_4 + cu_1^3,\ p_4u_1^3 + (c^3 + d^3)p_1^{k-1}z; \tag{2.17}$$

— степени 4:

$$u_iz \text{ для } \ i \in \{1, 2, 3\}; u_1^2v_1,\ u_1^2v_3,\ u_1^4, \tag{2.18}$$

$$v_iv_j \ \text{ для } \ i \neq j;\ \ v_1^2,\ v_2^2,\ v_4^2,\ \ v_3^2 + p_1^2e; \tag{2.19}$$

— степени 5:

$$v_iz \ \text{ для } \ i \neq 3;\ \ v_3z + p_1u_2e; \tag{2.20}$$

— степени 6:

$$z^2 = 0. \tag{2.21}$$

В силу однородности идеала I_1 алгебра $\mathcal{A}_1$ наследует градуировку с алгебры $K[\mathcal{X}_1]$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_1' := (\mathcal{X}_1 \setminus \{u_1\}) \cup \{u_1'\}, \tag{2.22}$$

где $\mathcal{X}_1$ из (2.1). На алгебре $K[\mathcal{X}_1']$ вводится градуировка так, что

$$\left.\begin{aligned}&\deg p_i = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant 4;\\ &\deg u_1' = \deg u_2 = \deg u_3 = 1,\\ &\deg v_m = 2,\ 1 \leqslant m \leqslant 4;\quad \deg z = 3,\quad \deg e = 4.\end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_1' = K[\mathcal{X}_1']/I_1'$, где идеал I_1' порождён образующими вида (2.3), (2.5), (2.7), (2.8), (2.10), (2.13), (2.14), (2.15), (2.19), (2.20), (2.21), а также элементами:

$$
\begin{gathered}
p_2u_1' + p_1^{k-2}u_2,\ \ p_1^2u_1',\\
p_3v_1 + p_4(u_1')^2,\ u_1'u_2,\ u_1'u_3,\\
p_1v_1,\ p_2v_2,\ p_3v_3;\ p_iv_4\ \text{ для любого } i,\\
p_1(u_1')^2,\ u_1'v_2 + p_1^{k-2}z;\\
u_1'v_4,\ p_1u_1'v_3,\ p_4(u_1')^3 + p_1^{k-1}z,\\
u_1'z,\ u_2z,\ u_3z,\ u_4z,\\
(u_1')^2v_1,\ (u_1')^2v_3,\ (u_1')^4.
\end{gathered}
$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_1'$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_1']$.

Предположим, что $k = 2l$ чётно и $l > 1$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, v_1, v_2, v_3, e\}. \tag{2.24}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_2]$ введём градуировку так, что

$$
\left.\begin{aligned}
&\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0,\\
&\deg q_1 = \deg q_2 = 1,\\
&\deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 2,\ \deg e = 4.
\end{aligned}\right\} \tag{2.25}
$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_2 = K[\mathcal{X}_2]/I_2$, где идеал I_2 порождён следующими элементами

$$
\left.\begin{gathered}
p_1^k,\ p_2^2,\ p_3^2,\ p_4^2,\\
p_ip_j\ \ \text{для}\ \ i \neq j;
\end{gathered}\right\} \tag{2.26}
$$

$$p_3q_1 + p_2q_2,\ p_1^{k-1}q_1 + dp_3q_1, \tag{2.27}$$

$$c(p_1q_1 + p_3q_2) + d(p_1q_2 + p_2q_1), \tag{2.28}$$

$$p_2v_1,\ p_4v_1,\ p_3v_2,\ p_4v_2,\ p_4v_3, \tag{2.29}$$

$$
\left.\begin{gathered}
p_2q_1^2,\ p_3q_2^2,\\
p_1v_1 + p_2v_2,\ p_1v_1 + p_3v_3,\ p_1v_1 + p_4q_1^2,\\
p_3v_1 + p_1v_2,\ p_3v_1 + p_2v_3,\ p_3v_1 + p_4q_2^2,
\end{gathered}\right\} \tag{2.30}
$$

$$
\left.\begin{gathered}
q_1q_2 + cdl(cp_3v_1 + dp_2v_2),\\
p_1^{k-1}v_3 + cp_3v_1 + dp_2v_2;
\end{gathered}\right\} \tag{2.31}
$$

$$\left.\begin{array}{c} q_1v_1+q_2v_2, \\ q_1^3+q_2^3+(c^3+d^3)(l+1)p_1q_1v_1, \end{array}\right\} \tag{2.32}$$

$$p_1^{k-2}q_2v_3+cq_1v_1,\ c(q_1v_3+q_2v_1)+d(q_2v_3+q_1v_2); \tag{2.33}$$

$$v_3^2+p_1^2e,\ q_2^2v_1; \tag{2.34}$$

$$q_1^2v_2, \tag{2.35}$$

$$v_iv_j \text{ для } i\neq j;\ v_1^2,\ v_2^2. \tag{2.36}$$

На алгебре $\mathcal{A}_2$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_2]$.

Далее, (считая по-прежнему, что $k=2l$, $l>1$) определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_2'=K[\mathcal{X}_2]/I_2'$, где $\mathcal{X}_2$ из (2.24), а идеал I_2' порождён элементами вида (2.26), (2.27), (2.29), (2.30), (2.32), (2.34), (2.36), а также элементами:

$$p_1q_2+p_2q_1,\ p_1^2q_2,$$
$$q_1q_2,\ p_1^{k-1}v_3+dp_2v_2;$$
$$p_3q_2v_1+p_1q_2v_2,\ p_3q_2v_1+p_2q_2v_3,$$
$$p_1^{k-2}q_1v_3+dq_2v_2,\ p_1^{k-2}q_2v_3,$$
$$p_1q_2v_1,\ p_1q_2v_3,$$
$$q_1v_2+q_2v_3,\ q_1^2v_3,\ q_2^2v_1,\ q_2^2v_2.$$

На алгебре $\mathcal{A}_2'$ введём градуировку, индуцированную градуировкой на $K[\mathcal{X}_2]$, для которой выполняются условия (2.25).

Далее, рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_3=\{p_1,p_2,p_3,p_4,\widetilde{q}_1,\widetilde{q}_2,v_1,v_2,v_3,e\}. \tag{2.37}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_3]$ введём градуировку так, что

$$\left.\begin{array}{l} \deg p_1=\deg p_2=\deg p_3=\deg p_4=0, \\ \deg\widetilde{q}_1=\deg\widetilde{q}_2=1, \\ \deg v_1=\deg v_2=\deg v_3=2,\ \deg e=4. \end{array}\right\}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_3=K[\mathcal{X}_3]/I_3$, где идеал I_3 порождён следующими элементами

$$p_ip_j \text{ для всех } i,j\in\{1,2,3,4\};$$
$$p_3\widetilde{q}_1+p_2\widetilde{q}_2,\ p_1\widetilde{q}_1+p_3\widetilde{q}_2+dp_3\widetilde{q}_1,$$
$$p_2\widetilde{q}_1+p_1\widetilde{q}_2+cp_3\widetilde{q}_1,$$

$$
\begin{gathered}
p_2v_1,\ p_4v_1,\ p_3v_2,\ p_4v_2,\ p_4v_3,\\
p_1v_1+p_2v_2,\ p_1v_1+p_3v_3,\ p_1v_1+p_4\widetilde{q}_1^{\,2},\\
p_3v_1+p_1v_2,\ p_3v_1+p_2v_3\ p_3v_1+p_4\widetilde{q}_2^{\,2},\\
\widetilde{q}_1\widetilde{q}_2+cd(cp_3v_1+dp_2v_2),\\
p_1^{k-1}v_3+cp_3v_1+dp_2v_2;\\
\widetilde{q}_1v_1+\widetilde{q}_2v_2,\ \widetilde{q}_1^{\,3}+\widetilde{q}_2^{\,3},\\
\widetilde{q}_1v_1+\widetilde{q}_2v_1+\widetilde{q}_1v_3+p_1\widetilde{q}_1v_1,\\
\widetilde{q}_1v_1+\widetilde{q}_1v_2+\widetilde{q}_2v_3+p_1\widetilde{q}_1v_1;\\
v_iv_j\ \text{ для всех }\ i,j\in\{1,2,3\}.
\end{gathered}
$$

На алгебре $\mathcal{A}_3$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_3]$.

Теорема 2.1. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики 2, и пусть $R=R_{k,c,d}$ где $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $c,d\in K$, $d\neq 0$.*

(1) *Предположим, что k нечётно.*

(1а) *Если, кроме того, $c\neq 0$, то алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}_1$.*

(1б) *Если же $c=0$, то $\mathrm{HH}^*(R)\simeq\mathcal{A}_1'$ как градуированные K-алгебры.*

(2) *Предположим, что k чётно и $k>2$.*

(2а) *Если, кроме того, $c\neq 0$, то $\mathrm{HH}^*(R)\simeq\mathcal{A}_2$ как градуированные K-алгебры.*

(2б) *Если же $c=0$, то $\mathrm{HH}^*(R)\simeq\mathcal{A}_2'$ как градуированные K-алгебры.*

(3) *Если $k=2$, то $\mathrm{HH}^*(R)\simeq\mathcal{A}_3$ как градуированные K-алгебры.*

§3. Резольвенты

Пусть $R=R_{k,c,d}$, где $k\geqslant 2, c,d\in K$ и $d\neq 0$. Из определяющих соотношений алгебры R легко следует, что $x^2y=yx^2=xy^2=y^2x=0$. Отсюда следует, что множество

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}=\{(xy)^i,(yx)^i\mid 1\leqslant i\leqslant k-1\}\cup\{x(yx)^i,\\
y(xy)^i\mid 0\leqslant i\leqslant k-1\}\cup\{1,(xy)^k\}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

является K-базисом алгебры R; назовём его *стандартным базисом.* В свою очередь обёртывающая алгебра $\Lambda=R\otimes R^{\mathrm{op}}$ допускает K-базис, состоящий из элементов $u \otimes v$, где u и v пробегают множество $\mathcal{B}$; его также назовём *стандартным*.

Для элемента $r \in R$ рассмотрим гомоморфизм правого умножения $r^*\colon R \to R$, $r^*(w) = wr$. Мы обычно этот гомоморфизм обозначаем также через r. Аналогично гомоморфизм $\lambda^*\colon \Lambda \to \Lambda$ правого умножения на элемент $\lambda \in \Lambda$ для простоты также часто обозначаем через λ.

Мы построим минимальную проективную бимодульную резольвенту алгебры R с использованием [39, теорема 1]. Для этого мы сейчас опишем минимальную проективную (=свободную) резольвенту (единственного) простого левого R-модуля S.

Предложение 3.1. *Минимальная проективная резольвента простого R-модуля S имеет вид*

$$S \leftarrow R \xleftarrow{\zeta_0} R \oplus R \xleftarrow{\zeta_1} R \oplus R \xleftarrow{\zeta_2} R \xleftarrow{\zeta_3} R \xleftarrow{\zeta_4} \cdots$$

где

$$\zeta_0 = (x, y); \quad \zeta_1 = \begin{pmatrix} x + cy(xy)^{k-1} & (xy)^{k-1} \\ (yx)^{k-1} & y + dx(yx)^{k-1} \end{pmatrix};$$

$$\zeta_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \quad \zeta_3 = \Big((xy)^k\Big)^*;$$

наконец, $\zeta_n = \zeta_{n-4}$ для $n \geqslant 4$.

Доказательство проводится с помощью прямых вычислений. □

Теперь построим следующую 4-периодическую последовательность в категории (левых) Λ-модулей

$$Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} Q_2 \xleftarrow{d_2} Q_3 \xleftarrow{d_3} \cdots .$$

Положим $Q_0 = Q_3 = \Lambda$, $Q_1 = Q_2 = \Lambda^2$, $Q_4 = Q_0$. Далее,

$$d_0 = \Big(x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad y \otimes 1 + 1 \otimes y\Big),$$

d_1 – это 2×2-матрица, в которой

$$(d_1)_{11} = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum_{i=0}^{k-2} (yx)^i y \otimes y(xy)^{k-2-i}$$
$$+ c \sum_{0}^{k-1} y(xy)^i \otimes (yx)^{k-i-1},$$

$$(d_1)_{12} = \sum_0^{k-1}(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} + d\sum_0^{k-1}(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i},$$

$$(d_1)_{21} = \sum_0^{k-1}(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + c\sum_0^{k-1}(yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i},$$

$$\begin{aligned}(d_1)_{22} =& y \otimes 1 + 1 \otimes y + \sum_0^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i}\\ &+ d\sum_0^{k-1} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-i-1};\end{aligned}$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} x \otimes 1 + 1 \otimes x + cx \otimes x + c \otimes y(xy)^{k-1} + c^2 x \otimes y(xy)^{k-1} \\ y \otimes 1 + 1 \otimes y + dy \otimes y + d \otimes x(yx)^{k-1} + d^2 y \otimes x(yx)^{k-1} \end{pmatrix};$$

$$d_3 = g^*, \text{ где}$$

$$\begin{aligned}g =& \sum_0^{k}(xy)^i \otimes (xy)^{k-i} + \sum_1^{k-1}(yx)^i \otimes (yx)^{k-i}\\ &+ \sum_0^{k-1} y(xy)^i \otimes x(yx)^{k-i-1} + \sum_0^{k-1} x(yx)^i \otimes y(xy)^{k-i-1}\\ &+ cy(xy)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1} + dx(yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1};\end{aligned}$$

а для $0 \leqslant j \leqslant 3$ и $l \in \mathbb{N}$

$$Q_{4l+j} = Q_j, \quad d_{4l+j} = d_j.$$

Непосредственно проверяется, что таким образом мы построили комплекс $Q_\bullet = \Big(Q_n,\ d_n\Big)_{n\geqslant 0}$.

Рассмотрим также пополняющее отображение $\mu\colon Q_0 = \Lambda \to R$, индуцированное умножением в R: $\mu(r \otimes s) = rs$.

Теорема 3.2. *Комплекс $Q_\bullet = (Q_n, d_n)_{n\geqslant 0}$ вместе с пополняющим отображением $\mu\colon Q_0 \to R$ является минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.*

Доказательство. Для доказательства ацикличности построенного комплекса мы используем теорему 1 из [39]. Поскольку $d_{n+1}d_n = 0$ для всех $n \geqslant 0$ и $\mu d_0 = 0$, то нам достаточно доказать, что после тензорного умножения комплекса $\mu\colon Q_\bullet \to R$ на простой R-модуль S

мы получаем минимальную проективную резольвенту модуля S, описанную в предложении 3.1. Это проверяется прямыми вычислениями; необходимые проверки оставляются читателю. $\square$

Замечание 3.3. Резольвента из предложения 3.1 может быть использована для вычисления алгебры Йонеды алгебры $R_{k,c,d}$. Описание этой алгебры Йонеды мы приведём в приложении.

§4. Группы когомологий

Пусть по-прежнему $R = R_{k,c,d}$ – K-алгебра, определённая в §2. Для вычисления групп когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ алгебры R мы используем комплекс

$$\Big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \ \delta^n = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_n, R)\Big)_{n\geqslant 0},$$

который получается применением функтора $\mathrm{Hom}_\Lambda(\,-\,, R)$ к бимодульной резольвенте $Q_\bullet \to R$ алгебры R, построенной в §3.

Так как для любого $n \geqslant 0$ модуль Q_n изоморфен Λ или Λ^2, то любой элемент из $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ отождествляется с элементом из R или с парой элементов из R соответственно.

Отметим также, что если $f = w^*\colon \Lambda \to \Lambda$ – гомоморфизм умножения справа на $w \in \Lambda$, то в соответствии с указанным выше отождествлением индуцированный гомоморфизм абелевых групп

$$\widetilde{w}\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(f, R)\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, R) \simeq R \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, R) \simeq R$$

действует следующим образом: $r \in R$ отображается в $w * r$ (где $*$ соответствует Λ-модульной структуре на R).

После такого отождествления дифференциал $\delta^0\colon R \to R^2$ описывается так: для $r \in R$

$$\delta^0(r) = \Big((x\otimes 1 + 1\otimes x) * r, (y\otimes 1 + 1\otimes y) * r\Big) = (xr + rx, yr + ry). \quad (4.1)$$

Предложение 4.1. $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + 3$, $\dim \mathrm{Im}\,\delta^0 = 3(k-1)$.

Доказательство. Ввиду [5, III.14] центр $Z(R) = Z^0(R)$ алгебры R допускает в качестве базиса следующее множество

$$\{1, xy + yx, (xy)^2 + (yx)^2, \dots, (xy)^{k-1} + (yx)^{k-1},$$
$$x(yx)^{k-1}, y(xy)^{k-1}, (xy)^k\}.$$

Таким образом, $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k+3$ и

$$\dim \operatorname{Im} \delta^0 = \dim_K R - \dim_K \operatorname{Ker} \delta^0 = 3(k-1). \qquad \square$$

Замечание 4.2. Если в (4.1) элемент r пробегает все элементы стандартного базиса алгебры R, то непосредственно получаем, что $\operatorname{Im} \delta^0$ имеет в качестве базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$((xy)^i + (yx)^i, 0),\ (0, (yx)^i + (xy)^i),\ (x(yx)^i, y(xy)^i),\ \text{где } 1 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Дифференциал

$$\delta^1 \colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R)$$

после указанных выше отождествлений может быть описан следующим образом: для $r_1, r_2 \in R$ имеем

$$\delta^1(r_1, r_2) = (t_1, t_2),$$

где

$$\begin{aligned} t_1 = xr_1 + r_1 x &+ \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \cdot r_1 \cdot y(xy)^{k-2-i} + c \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \cdot r_1 \cdot (yx)^{k-1-i} \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \cdot r_2 \cdot (xy)^{k-1-i} + c \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \cdot r_2 \cdot x(yx)^{k-1-i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_2 = &\sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \cdot r_1 \cdot (yx)^{k-1-i} + d \sum_{i=0}^{k-1} (xy)^i \cdot r_1 \cdot y(xy)^{k-1-i} \\ &+ yr_2 + r_2 y + \sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \cdot r_2 \cdot x(yx)^{k-2-i} \\ &+ d \sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \cdot r_2 \cdot (xy)^{k-1-i}. \end{aligned}$$

Теперь аналогично рассуждениям из [1, §3] (с использованием, в частности, разложений элементов r_1, r_2 по стандартному базису алгебры R) приходим к следующему описанию базиса $\operatorname{Ker} \delta^1$.

Предложение 4.3. (а) *Предположим, что k нечётно. Тогда пространство* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i+(yx)^i,0\Big) \ \text{для} \ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.2}$$

$$\Big(x(yx)^i,0\Big) \ \text{для} \ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.3}$$

$$\Big(0,(xy)^i+(yx)^i\Big) \ \text{для} \ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.4}$$

$$\Big(0,y(xy)^i\Big) \ \text{для} \ 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{4.5}$$

$$\Big(d+cdx+cy(xy)^{k-2}+c^2(yx)^{k-1},c+cdy+dx(yx)^{k-2}+d^2(xy)^{k-1}\Big), \tag{4.6}$$

$$\Big(y(xy)^{k-1},0\Big),\ \Big((xy)^k,0\Big),\ \Big(0,x(yx)^{k-1}\Big),\ \Big(0,(xy)^k\Big). \tag{4.7}$$

(б) *Пусть теперь k чётно и $k>2$. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *надо в множестве, указанном в части* (а), *элемент* (4.6) *заменить на пару элементов*

$$\Big(y(xy)^{k-2}+c(yx)^{k-1},1+dy\Big),\ \Big(1+cx,x(yx)^{k-2}+d(xy)^{k-1}\Big). \tag{4.8}$$

(в) *Если $k=2$, то в качестве базиса* $\operatorname{Ker}\delta^1$ *можно взять множество, состоящее из элементов, указанных в* (4.2)–(4.5), (4.7), *а также элементов*

$$\Big(y+cyx,1+dy+xy\Big),\ \Big(1+cx+yx,x+dxy\Big). \tag{4.9}$$

Предложение 4.4. (а) *Предположим, что k нечётно. Тогда пространство* $\operatorname{Im}\delta^1$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i + (yx)^i, 0\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.10}$$

$$\Big(x(yx)^i, 0\Big) \ \text{для}\ 2 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.11}$$

$$\Big(0, (xy)^i + (yx)^i\Big) \ \text{для}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.12}$$

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) \ \text{для}\ 2 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.13}$$

$$\Big(c(xy)^k, d(xy)^k\Big), \tag{4.14}$$

$$\Big(xyx, (xy)^k\Big),\ \Big(y(xy)^{k-1}, 0\Big), \tag{4.15}$$

$$\Big((xy)^k, yxy\Big),\ \Big(0, x(yx)^{k-1}\Big). \tag{4.16}$$

(б) *Предположим теперь, что k чётно и $k > 2$. Тогда для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо из множества, указанного в части* (а)*, удалить элемент* (4.14).

(в) *Если $k = 2$, то пространство* $\operatorname{Im}\delta^1$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big(yxy, 0\Big),\ \Big(xy + yx + (xy)^2, 0\Big),\ \Big(xyx, (xy)^2\Big),$$
$$\Big(0, xyx\Big),\ \Big(0, xy + yx + (xy)^2\Big),\ \Big((xy)^2, yxy\Big).$$

Доказательство. Для доказательства утверждения достаточно рассмотреть значения δ^1 на наборах вида (r_1, r_2), где ровно один из r_i ненулевой и пробегает стандартный базис алгебры R (см. (3.1)), а затем с помощью полученного множества значений выделить для каждого из рассматриваемых выше случаев базис пространства $\operatorname{Im}\delta^1$. $\square$

Предложение 4.5. *Для любого $k \geqslant 2$ пространство* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i + (yx)^i, 0\Big) \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.17}$$

$$\Big(x(yx)^i, 0\Big) \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.18}$$

$$\Big(y(xy)^{i-1} + c(yx)^i, x(yx)^{i-1} + d(xy)^i\Big) \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.19}$$

$$\Big(0, (xy)^i + (yx)^i\Big) \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.20}$$

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.21}$$

$$\Big(1, 0\Big),\ \Big(0, 1\Big),\ \Big((xy)^k, 0\Big), \tag{4.22}$$

$$\Big(y(xy)^{k-1}, 0\Big),\ \Big(0, x(yx)^{k-1}\Big),\ \Big(0, (xy)^k\Big). \tag{4.23}$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 4.3. □

Предложение 4.6. *Для любого $k \geqslant 2$ пространство* $\operatorname{Im}\delta^2$ *допускает в качестве K-базиса следующее множество*:

$$\Big\{(xy)^i + (yx)^i,\ x(yx)^i,\ y(xy)^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\Big\}.$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 4.4. □

Предложение 4.7. *Предположим, что k нечётно. Тогда*:

(а) *пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве K-базиса набор когомологических классов элементов, указанных в* (4.3), (4.6), (4.7);

(б) *пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве K-базиса набор когомологических классов элементов, указанных в* (4.19), (4.22), *а также элементов*

$$\Big(x, 0\Big),\ \Big(0, y\Big).$$

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из предложений 4.3 и 4.5, а также замечания 4.2. □

Аналогичным образом доказываются следующие два предложения.

Предложение 4.8. *Предположим, что k чётно и $k > 2$. Тогда*:

(а) *для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^1(R)$ *надо в множестве, указанном в предложении* 4.7, *п.* (а), *когомологический класс элемента из* (4.6), *заменить на когомологические классы элементов из* (4.8);

(б) *для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^2(R)$ *надо к множеству, указанному в предложении* 4.7, *п.* (б), *добавить когомологический класс элемента* $\Big(0,(xy)^k\Big)$.

Предложение 4.9. *Предположим, что* $k=2$. *Тогда*:

(а) *для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^1(R)$ *надо в множестве, указанном в предложении* 4.8, *п.* (а), *когомологические классы элементов из* (4.8), *заменить на когомологические классы элементов из* (4.9);

(б) *в качестве базиса пространства* $\mathrm{HH}^2(R)$ *можно взять множество, указанное в предложении* 4.8, *п.* (б).

Предложение 4.10. *Для любого* $k\geqslant 2$ *пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса набор когомологических классов следующих элементов из* $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_3,R)\simeq R$:

$$1,x,y;(xy)^i \ \text{ при } \ 1\leqslant i\leqslant k.$$

Доказательство. Легко проверяется, что δ^3 – нулевой гомоморфизм, и тогда требуемое утверждение вытекает из предложения 4.6. □

Замечание 4.11. Из того, что $\delta^3=0$, и того, что резольвента из теоремы 3.2 4-периодична, следует, что $\mathrm{HH}^4(R)\simeq\mathrm{HH}^0(R)$.

Следствие 4.12. *Для любого* $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\dim\mathrm{HH}^{4m}(R)=\dim\mathrm{HH}^{4m+3}(R)=k+3,$$
$$\dim\mathrm{HH}^{4m+1}(R)=\dim\mathrm{HH}^{4m+2}(R)=\begin{cases}k+4, & \text{если } k \text{ нечётно},\\ k+5, & \text{если } k \text{ чётно}.\end{cases}$$

§5. Образующие и соотношения

Случай 1. Мы в этом разделе предполагаем, что k нечётно. Введём дополнительное обозначение

$$\Delta:=c^3+d^3. \tag{5.1}$$

1.1. Предположим дополнительно, что $c \neq 0$. Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : $\begin{cases} p_1 := xy + yx, \ p_2 := x(yx)^{k-1}, \\ p_3 := y(xy)^{k-1}, \ p_4 := (xy)^k; \end{cases}$

— степени 1 : $\begin{cases} u_1 := (d + cdx + cy(xy)^{k-2} + c^2(yx)^{k-1}, \\ \qquad\qquad c + cdy + dx(yx)^{k-2} + d^2(xy)^{k-1}), \\ u_2 := (xyx, 0), \ u_3 := (0, (xy)^k); \end{cases}$

— степени 2 : $\begin{cases} v_1 := (x, 0), \ v_2 := (0, y), \\ v_3 := (y + cyx, x + dxy), \ v_4 := (0, 1); \end{cases}$

— степени 3 : $z := xy$;

— степени 4 : $e := 1$.

Замечание 5.1. Сразу отметим, что изоморфизм (см. следствие 4.12)

$$\mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{HH}^{n+4}(R), \ \ n \geqslant 0,$$

индуцируется умножением на $e \in \mathrm{HH}^4(R)$.

Предложение 5.2. *Пусть k нечётно, и пусть $c \neq 0$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4, z, e\} \tag{5.2}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ выполняются следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{c} p_1^k = 0, \ p_ip_j = 0 \ \textit{при} \ i \neq j, \\ p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = 0; \end{array}\right\} \tag{5.3}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_2u_2 = p_3u_2 = p_4u_2 = 0, \\ p_iu_3 = 0 \ \textit{для любого} \ i, \end{array}\right\} \tag{5.4}$$

$$\left.\begin{array}{c} c^2p_3u_1 + cdp_1u_1 + d^2p_2u_1 = \Delta p_1^{k-2}u_2, \\ p_1^2u_1 = p_1^{k-1}u_2 = 0, \end{array}\right\} \tag{5.5}$$

$$p_1v_1 = p_2v_2 = p_3v_3 = p_4v_4, \tag{5.6}$$

$$p_3v_1 = p_2v_3 = p_1v_2, \tag{5.7}$$

$$p_2v_1 = p_4v_1 = p_3v_2 = p_4v_2 = p_4v_3 = 0, \tag{5.8}$$

$$\left.\begin{array}{c} cp_3v_1 = dp_1v_1, \\ p_1v_4 = p_2v_4 = p_3v_4 = 0, \end{array}\right\} \tag{5.9}$$

$$p_1^{k-1}v_3 = u_2^2 = u_2u_3 = u_3^2 = 0, \tag{5.10}$$

$$\left.\begin{array}{c}\Delta u_1u_3 = c^2p_4u_1^2,\\ p_1v_1 = c^{-1}u_1u_3,\ p_1u_1^2 = u_1u_2 = 0;\end{array}\right\} \tag{5.11}$$

$$p_iz = 0 \ \textit{при}\ i > 1, \tag{5.12}$$

$$\left.\begin{array}{c}u_2v_3 = p_1z,\ u_3v_4 = p_1^{k-1}z,\\ u_2v_1 = u_2v_2 = u_2v_4 = u_3v_1 = u_3v_2 = u_3v_3 = 0,\end{array}\right\} \tag{5.13}$$

$$c^2u_1v_1 + cdu_1v_3 + d^2u_1v_2 = \Delta p_1^{k-2}z; \tag{5.14}$$

$$\Delta u_1v_4 = cu_1^3,\ p_4u_1^3 = \Delta p_1^{k-1}z; \tag{5.15}$$

$$u_iz = 0 \ \textit{при любом}\ i, \tag{5.16}$$

$$u_1^2v_1 = u_1^2v_3 = u_1^4 = 0, \tag{5.17}$$

$$v_iv_j = 0 \ \textit{при}\ i \neq j, v_1^2 = v_2^2 = v_4^2 = 0,\ \ v_3^2 = p_1^2e, \tag{5.18}$$

$$v_3z = p_1u_2e,\ v_iz = 0 \ \textit{при}\ i \neq 3,\ z^2 = 0. \tag{5.19}$$

Доказательство. Соотношения (5.3)–(5.9), (5.12) проверяются непосредственно. Для доказательства остальных соотношений мы в следующем предложении опишем трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_1 \setminus \{e\}$, имеющих положительную степень. При этом мы для всякого m-коцикла $f = (r_i)_{i=1}^{\ell} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_m, R) \simeq R^\ell$ $(\ell \in \{1,2\})$ в качестве нулевой трансляции для единообразия берём $\mathrm{T}^0(f) = (r_i \otimes 1)_{i=1}^{\ell}$.

Лемма 5.3. *В качестве трансляций элементов из $\mathcal{Y}_1 \setminus \{e\}$, имеющих положительную степень, можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*
$\mathrm{T}^1(u_1)$ *– это 2×2-матрица, в которой*

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^1(u_1))_{11} = {}& c\sum_{i=1}^{k-1} y(xy)^{i-1} \otimes (xy)^{k-i-1} + c\sum_{i=0}^{k-2}(xy)^i \otimes y(xy)^{k-i-2}\\ &+ c^2\sum_{i=1}^{k-1}(xy)^i \otimes (yx)^{k-i-1} + c^2\sum_{i=0}^{k-2}(yx)^i \otimes (yx)^{k-i-1}\\ &+ cd\sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-i-2} + c^2d\sum_{i=0}^{k-1} y(xy)^i \otimes (yx)^{k-i-1}\\ &+ d \otimes 1 + cdx \otimes 1 + d(xy)^{k-2} \otimes (xy)^{k-1} + cd(xy)^{k-2} \otimes y^2\\ &+ d^2(xy)^{k-2} \otimes y(xy)^{k-1} + dy(xy)^{k-3} \otimes y^2,\\ (\mathrm{T}^1(u_1))_{12} = {}& c\sum_{i=0}^{k-2}(xy)^i \otimes x(yx)^{k-i-2} + d\sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes (yx)^{k-i-2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ d^2 \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-i-2} + cd \sum_{i=0}^{k-2} (xy)^i \otimes (xy)^{k-i-1} \\
&+ c^2 y(xy)^{k-2} \otimes (yx)^{k-1} + c^2 y(xy)^{k-3} \otimes (xy)^k \\
&\quad + c^2 dy(xy)^{k-2} \otimes y(xy)^{k-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{T}^1(u_1))_{21} &= d \sum_{i=0}^{k-2} (yx)^i \otimes y(xy)^{k-i-2} + c \sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-i-2} \\
&+ c^2 \sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-i-2} + cd \sum_{i=0}^{k-2} (yx)^i \otimes (yx)^{k-i-1} \\
&+ d^2 x(yx)^{k-2} \otimes (xy)^{k-1} + d^2 x(yx)^{k-3} \otimes (xy)^k \\
&\quad + cd^2 x(yx)^{k-2} \otimes x(yx)^{k-1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{T}^1(u_1))_{22} &= d \sum_{i=1}^{k-1} x(yx)^{i-1} \otimes (yx)^{k-i-1} + d \sum_{i=0}^{k-2} (yx)^i \otimes x(yx)^{k-i-2} \\
&+ d^2 \sum_{i=1}^{k-1} (yx)^i \otimes (xy)^{k-i-1} + d^2 \sum_{i=0}^{k-2} (xy)^i \otimes (xy)^{k-i-1} \\
&+ cd \sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-i-2} + cd^2 \sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-i-1} \\
&+ c \otimes 1 + cdy \otimes 1 + c(yx)^{k-2} \otimes (yx)^{k-1} + cd(yx)^{k-2} \otimes y(xy)^{k-1} \\
&+ c^2 d(yx)^{k-2} \otimes (xy)^k + c^2 (yx)^{k-2} \otimes x(yx)^{k-1} + cx(yx)^{k-3} \otimes x^2;
\end{aligned}
$$

$\mathrm{T}^1(u_2)$ – *это* 2×2*-матрица, в которой*

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{T}^1(u_2))_{11} &= \sum_{i=1}^{k-2} iy(xy)^{i+1} \otimes y(xy)^{k-i-2} \\
&\quad + c \sum_{i=0}^{k-3} (i+1) y(xy)^{i+1} \otimes (yx)^{k-i-1} + xyx \otimes 1 + cy \otimes (xy)^k,
\end{aligned}
$$

$$
(\mathrm{T}^1(u_2))_{12} = \sum_{i=1}^{k-2} i(xy)^{i+1} \otimes (yx)^{k-i-1} + d \sum_{i=1}^{k-2} i(xy)^{i+1} \otimes y(xy)^{k-i-1},
$$

$$
(\mathrm{T}^1(u_2))_{21} = \sum_{i=1}^{k-2} i(yx)^{i+1} \otimes (xy)^{k-i-1}
$$

$$+ c\sum_{i=0}^{k-3}(i+1)(yx)^{i+1} \otimes x(yx)^{k-i-1} + c(xy)^k \otimes x,$$

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{22} = \sum_{i=1}^{k-2} ix(yx)^i \otimes x(yx)^{k-i-1} + d\sum_{i=1}^{k-2} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-i};$$

$$\mathrm{T}^1(u_3) = \mathrm{diag}\Big((xy)^k \otimes y(xy)^{k-2} + c(xy)^k \otimes (yx)^{k-1},\ \ (xy)^k \otimes 1\Big);$$

$$\mathrm{T}^1(v_1) = \begin{pmatrix} x \otimes 1 + cx \otimes x + c^2 x \otimes y(xy)^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_1) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-1}(xy)^i \otimes (xy)^{k-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-1} y(xy)^i \otimes x(yx)^{k-1-i} + cy(xy)^{k-1} \\ \otimes y(xy)^{k-1}(xy)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1} + (yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^1(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \otimes 1 + dy \otimes y + d^2 y \otimes x(yx)^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_2) = \begin{pmatrix} (yx)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1} + (xy)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1}(yx)^i \otimes (yx)^{k-i} + \sum\limits_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \otimes y(xy)^{k-1-i} \\ +dx(yx)^{k-1} \otimes x(yx)^{k-1} \end{pmatrix};$$

$\mathrm{T}^1(v_3)$ – *это* 2×1-*матрица, в которой*

$$(\mathrm{T}^1(v_3))_{11} = y \otimes 1 + cxy \otimes 1 + cyx \otimes 1 + c^3 xy \otimes y(xy)^{k-1} + d^2 y \otimes y^2$$
$$+ c^2 xyx \otimes 1 + c^2 y \otimes y(xy)^{k-1} + d \otimes y^2,$$

$$(\mathrm{T}^1(v_3))_{21} = x \otimes 1 + dyx \otimes 1 + dxy \otimes 1 + d^3 yx \otimes x(yx)^{k-1} + c^2 x \otimes x^2$$
$$+ d^2 yxy \otimes 1 + d^2 x \otimes x(yx)^{k-1} + c \otimes x^2;$$

$\mathrm{T}^2(v_3)$ – *это* 2×1-*матрица, в которой*

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^2(v_3))_{11} &= x\otimes xy + c\sum_{i=0}^{k-1}(xy)^{i+1}\otimes y(xy)^{k-i-1}\\ &+ c\sum_{i=0}^{k-1} y(xy)^i\otimes (yx)^{k-i} + c^2\sum_{i=0}^{k-2}(xy)^{i+1}\otimes (xy)^{k-i}\\ &+ c^2\sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^{i+1}\otimes x(yx)^{k-i-1} + y(xy)^{k-1}\otimes y\\ &+ (xy)^{k-1}\otimes x(yx)^{k-1} + dy(xy)^{k-1}\otimes y^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^2(v_3))_{21} = y\otimes yx &+ d\sum_{i=0}^{k-1}(yx)^{i+1}\otimes x(yx)^{k-i-1} + d\sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i\otimes (xy)^{k-i}\\ &+ d^2\sum_{i=0}^{k-2}(yx)^{i+1}\otimes (yx)^{k-i} + d^2\sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^{i+1}\otimes y(xy)^{k-i-1}\\ &+ x(yx)^{k-1}\otimes x + (yx)^{k-1}\otimes y(xy)^{k-1}\\ &+ cx(yx)^{k-1}\otimes x^2;\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^1(v_4) = \begin{pmatrix} 0\\ 1\otimes 1 + d\otimes y + d^2\otimes x(yx)^{k-1}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{T}^2(v_4) = \begin{pmatrix}(xy)^{k-1}\otimes (yx)^{k-1}\\ *\end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^2(v_4))_{21} &= \sum_{i=0}^{k-1}(yx)^i\otimes x(yx)^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k} x(yx)^{i-1}\otimes (xy)^{k-i}\\ &+ \sum_{i=0}^{k-1}(yx)^i\otimes d(yx)^{k-i} + \sum_{i=1}^{k} dx(yx)^{i-1}\otimes y(xy)^{k-i}\\ &+ c(yx)^{k-1}\otimes y(xy)^{k-1} + d^2x(yx)^{k-1}\otimes x(yx)^{k-1};\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^1(z) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-2} iy(xy)^i \otimes (yx)^{k-i} \\ \sum_{i=1}^{k-2} i(yx)^{i+1} \otimes x(yx)^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-2} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-i} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^2(z) = \begin{pmatrix} 0 & y(xy)^{k-1} \otimes y^2 \\ xy \otimes yx & 0 \end{pmatrix};$$

$\mathrm{T}^3(z)$ – *это* 1×2*-матрица, в которой*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^3(z))_{11} = {} & \sum_{i=0}^{k-2} iy(xy)^i \otimes (xy)^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-2} i(yx)^{i+1} \otimes y(xy)^{k-i} \\
& + c\sum_{i=1}^{k-2} iy(xy)^i \otimes x(yx)^{k-i} + c\sum_{i=1}^{k-2} i(yx)^{i+1} \otimes (yx)^{k-i}, \\
(\mathrm{T}^3(z))_{12} = {} & \sum_{i=1}^{k} i(xy)^i \otimes x(yx)^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-2} ix(yx)^i \otimes (yx)^{k-i} \\
& + d\sum_{i=1}^{k-2} ix(yx)^{i+1} \otimes y(xy)^{k-i-1} + d\sum_{i=1}^{k-2} i(xy)^{i+1} \otimes (xy)^{k-i} \\
& + y(xy)^{k-1} \otimes y(xy)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Доказательство леммы состоит в прямой проверке соотношений $\mu\mathrm{T}^0(b) = b$, $d_{i-1}\mathrm{T}^i(b) = \mathrm{T}^{i-1}(b)d_{i+\deg b-1}$ $(i > 0)$ для $b \in \mathcal{Y}_1 \setminus \{t\}$ с $\deg b > 0$. □

В следующей лемме мы укажем трансляции первого порядка для u_1^2 и u_1^3; они нам необходимы для вычисления элементов u_1^3 и u_1^4 (и эти трансляции вычисляются значительно проще, чем трансляции высоких порядков для элемента u_1).

Лемма 5.4. *В качестве трансляций* $\mathrm{T}^1(u_1^2)$ *и* $\mathrm{T}^1(u_1^3)$ *можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^1(u_1^2) = \begin{pmatrix} d^2 \otimes 1 + cd^2 \otimes x + c^2d^2 \otimes y(xy)^{k-1} \\ c^2 \otimes 1 + c^2d \otimes y + c^2d^2 \otimes x(yx)^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_1^3) = \Delta \cdot \begin{pmatrix} * \\ cy(xy)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1} \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_1^3))_{11} = \sum_{i=0}^{k-1}(xy)^i \otimes y(xy)^{k-i-1} + \sum_{i=0}^{k-1} y(xy)^i \otimes (yx)^{k-i-1} + dx(yx)^{k-1} \otimes (yx)^{k-1}.$$

Доказательство. Пользуясь леммой 5.3, мы получаем, что

$$u_1^2 = \mu\mathrm{T}^0(u_1)\mathrm{T}^1(u_1) = (d^2,\ c^2),$$

и теперь легко проверяем, что $\mathrm{T}^0(u_1^2)d_2 = d_0\mathrm{T}^1(u_1^2)$. Далее, аналогично используя формулу для $\mathrm{T}^1(u_1^2)$, получаем, что

$$u_1^3 = \mu\mathrm{T}^0(u_1)\mathrm{T}^1(u_1^2) = \Delta \cdot 1 \in \mathrm{HH}^3(R).$$

И вновь прямыми вычислениями проверяем соотношение $\mathrm{T}^0(u_1^3)d_3 = d_0\mathrm{T}^1(u_1^3)$. □

Теперь доказательство предложения 5.2 завершается с помощью прямых вычислений с матрицами, приведенными в леммах 5.3 и 5.4, и это предоставляется проделать читателю. □

Замечание 5.5. Для дальнейшего полезно заметить, что формулы для трансляций, указанные в леммах 5.3 и 5.4, остаются справедливыми и при $c = 0$. Кроме того, элементы v_1, v_2, v_3 будут включены в множество образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ и при чётном k, а формулы для $\mathrm{T}^i(v_j)$, $i, j \in \{1, 2\}$, приведённые в лемме 5.3, остаются справедливыми для всех k, бóльших 2; наконец, формулы для $\mathrm{T}^1(v_3), \mathrm{T}^2(v_3)$ справедливы для всех значений k.

Предложение 5.6. *Предположим, что k нечётно, а $c \neq 0$. Множество $\mathcal{Y}_1$, указанное в* (5.2)*, порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_1 \cup \{1\}$ (здесь 1 – единица алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$). Ввиду замечания 5.1 нам достаточно убедиться, что $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$ при $0 \leqslant n \leqslant 3$.

Ясно, что $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Далее, включение $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$ следует из соотношений для базисных элементов, указанных в предложении 4.7, п. (a):

$$
\begin{aligned}
(x(yx)^i, 0) &= p_1^{i-1} u_2 \ \text{ при } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
(0, x(yx)^{k-1}) &= d^{-1} p_1 u_1 + c d^{-2} p_3 u_1 + d u_3 + c^2 d^{-2} p_1^{k-2} u_2,\\
(y(xy)^{k-1}, 0) &= d^{-1} p_2 u_1 + c u_3 + c d^{-1} \cdot (0, x(yx)^{k-1}),\\
((xy)^k, 0) &= d^{-1} p_4 u_1 + c d^{-1} u_3.
\end{aligned}
$$

Включение $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$ имеет место, поскольку для базисных элементов, указанных в предложении 4.7, п. (б), выполняются соотношения:

$$
\begin{aligned}
&(y(xy)^{i-1} + c(yx)^i,\ x(yx)^{i-1} + d(xy)^i) = p_1^{i-1} v_3 \ \text{ при } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(1, 0) = d^{-2} u_1^2 + c^2 v_4, \qquad (0, (xy)^k) = c^{-1} u_1 u_3.
\end{aligned}
$$

Наконец, для базисных элементов группы $\mathrm{HH}^3(R)$, указанных в предложении 4.10, выполняются сооношения:

$$
\begin{aligned}
(xy)^i &= p_1^{i-1} z \ \text{ при } \ 1 \leqslant i \leqslant k,\\
1 &= c^{-1} u_1 v_4,\\
x &= d^{-1} u_1 v_1 + c d^{-1} p_1^{k-2} z,\\
y &= c^{-1} u_1 v_2 + c^{-1} p_1^{k-2} z,
\end{aligned}
$$

и получаем включение $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_1 = K[\mathcal{X}_1]/I_1$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_1$ из (2.1), а I_1 – соответствующий идеал соотношений (см. (2.3)–(2.21)). (Ненулевые) образы мономов из $K[\mathcal{X}_1]$ относительно канонического эпиморфизма $K[\mathcal{X}_1] \to \mathcal{A}_1$ также будем называть мономами. Произвольный элемент $a \in \mathcal{A}_1$ записывается в виде линейной комбинации мономов (с коэффициентами из K). Из предложений 5.2 и 5.6 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_1$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_1$ (см. (5.2)); заметим, что, не боясь двусмысленности, мы обозначили одинаково элементы из обоих множеств, которые соответствуют друг другу. Пусть $\mathcal{A}_1 = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathcal{A}_1^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_1$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (1а) теоремы 2.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 5.7. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_1^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Прежде чем переходить к доказательству этого предложения, сформулируем следующий вспомогательный факт, который доказывается прямыми вычислениями.

Лемма 5.8. *Пусть* $c \neq 0$. *В алгебре* $\mathcal{A}_1$ *выполняются соотношения:*

$$p_1u_1u_3 = p_3u_1u_3 = p_4u_1u_3 = p_1u_1v_3 = 0,$$
$$u_1^2u_3 = c^2p_1^{k-1}z.$$

Доказательство предложения 5.7. Мы рассмотрим отдельно два случая: а) Δ из (5.1) отлично от 0; б) $\Delta = 0$.

а) Пусть $\Delta \neq 0$. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_1]$ введем лексикографический порядок такой, что

$$v_2 > v_1 > v_3 > v_4 > u_1 > u_3 > u_2 > z > e > p_2 > p_1 > p_3 > p_4.$$

Назовем *редукцией* монома f из $\mathcal{A}_1$ процесс замены некоторых подмономов в f на другие элементы из $\mathcal{A}_1$ по следующим правилам ($a \mapsto b$ означает замену каждого вхождения монома a на элемент b):

$$\begin{array}{ll}
p_2u_1 \mapsto d^{-2}(\Delta p_1^{k-2}u_2 + c^2p_3u_1 + cdp_1u_1), & \\
p_2v_2 \mapsto p_1v_1 \mapsto p_3v_3 \mapsto p_4v_4 \mapsto c^{-1}u_1u_3, & \\
p_1v_2 \mapsto p_3v_1 \mapsto p_2v_3 \mapsto c^{-2}du_1u_3, & \\
u_1v_2 \mapsto d^{-2}(\Delta p_1^{k-2}z + cdu_1u_3 + c^2u_1v_1), & \\
p_4u_1^2 \mapsto \Delta c^{-2}u_1u_3, & u_2v_3 \mapsto p_1z, \\
u_3v_4 \mapsto p_1^{k-1}z, & u_1v_4 \mapsto \Delta^{-1}cu_1^3, \\
p_4u_1^3 \mapsto \Delta p_1^{k-1}z, & v_3^2 \mapsto p_1^2e, \\
v_3z \mapsto p_1u_2e, & u_1^2u_3 \mapsto c^2p_1^{k-1}z.
\end{array}$$

Любую замену из приведенного выше списка назовем элементарным шагом редукции. Так как после каждого элементарного шага редукции ненулевой моном переходит в строго меньший относительно лексикографического порядка, то за конечное число шагов мы получаем мономы, к которым уже нельзя применить никакой элементарный шаг редукции. Говорим, что представление элемента $a \in \mathcal{A}_1$ в виде линейной комбинации мономов имеет нормальную форму, если ни к одному из этих мономов нельзя применить редукцию. Поскольку эти элементарные шаги соответствуют некоторым соотношениям, выполняющимся в алгебре $\mathcal{A}_1$ (см. (5.3)–(5.19) и лемму 5.8), то любой элемент $a \in \mathcal{A}_1$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $b_i = \dim_K \mathcal{A}_1^i$. Через $\widetilde{b}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_1^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{b}_i \geqslant b_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_1^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $b_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{b}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{5.20}$$

Докажем, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени $4m$:

$$\left\{p_1^i e^m\right\}_{i=0}^{k-1},\ p_2e^m,\ p_3e^m,\ p_4e^m; \tag{5.21}$$

(таких мономов имеется $k+3$);

мономы степени $4m+1$:

$$\left\{p_1^i u_2 e^m\right\}_{i=0}^{k-2},\ u_1e^m,\ p_1u_1e^m,\ p_3u_1e^m,\ p_4u_1e^m,\ u_3e^m; \tag{5.22}$$

(число таких мономов равно $k+4$);

мономы степени $4m+2$:

$$\left\{p_1^i v_3 e^m\right\}_{i=0}^{k-2},\ v_1e^m,\ v_2e^m,\ v_4e^m,\ u_1u_3e^m, u_1^2e^m; \tag{5.23}$$

(число таких мономов равно $k+4$);

мономы степени $4m+3$:

$$\left\{p_1^i z e^m\right\}_{i=0}^{k-1},\ u_1v_1e^m,\ u_1v_3e^m,\ u_1^3e^m; \tag{5.24}$$

(число таких мономов равно $k+3$). Легко видеть, что все мономы из этого списка имеют нормальную форму.

Пусть

$$f = v_2^{\alpha_2} v_1^{\alpha_1} v_3^{\alpha_3} v_4^{\alpha_4} u_1^{\beta_1} u_3^{\beta_3} u_2^{\beta_2} z^{\gamma} e^m p_2^{\varepsilon_2} p_1^{\varepsilon_1} p_3^{\varepsilon_3} p_4^{\varepsilon_4} \tag{5.25}$$

– некоторый ненулевой моном, имеющий нормальную форму. Ввиду соотношений, выполняющихся в алгебре $\mathcal{A}_1$, а также с учётом некоторых элементарных шагов редукции в формуле (5.25) выполняются соотношения:

$$\begin{aligned}&\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3, \gamma, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \in \{0,1\},\\ &\beta_1 \leqslant 3,\ \varepsilon_1 \leqslant k-1,\ m \in \mathbb{N}\cup\{0\}.\end{aligned}$$

Далее мы проанализируем последовательно несколько случаев.

1) Предположим, что в f входит v_2. Тогда ввиду некоторых мономиальных соотношений, выполняющихся в алгебре $\mathcal{A}_1$, получаем, что в

f не входят $v_1, v_3, v_4, u_3, u_2, z, p_4, p_3$; кроме того, в f не входят p_2 (есть редукция $p_2v_2 \mapsto c^{-1}u_1u_3$), p_1 (так как $p_1v_2 \mapsto c^{-2}du_1u_3$), u_1 (так как $u_1v_2 \mapsto d^{-2}(\Delta p_1^{k-2}z + cdu_1u_3 + c^2u_1v_1)$). Таким образом, $f = v_2e^m$.

2) Предположим, что v_2 не входит в f, но входит v_1. Тогда аналогично предыдущему заключаем, что в f не входят v_3, v_4, u_3, u_2, z, p_2, p_1, p_3, p_4. Таким образом, $f = v_1u_1^{\beta_1}e^m$; здесь $\beta_1 \leqslant 1$, так как $u_1^2v_1 = 0$. Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$v_1e^m,\ u_1v_1e^m.$$

3) Пусть в f не входят v_2, v_1, и предположим, что v_3 входит в f. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что в f не могут входить также $v_4, v_2, u_3, u_2, z, p_2, p_3, p_4$. Таким образом, $f = v_3u_1^{\beta_1}e^mp_1^{\varepsilon_1}$, при этом $\varepsilon_1 \leqslant k-2$, $\beta_1 \leqslant 1$, а если $\beta_1 = 1$, то $\varepsilon_1 = 0$ (так как $p_1u_1v_3 = 0$). Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$p_1^iv_3e^m\ (0 \leqslant i \leqslant k-2),\ u_1v_3e^m.$$

4) Пусть в f не входят v_2, v_1, v_3, и предположим, что v_4 входит в f. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что в этом случае f имеет вид $f = v_4e^m$.

5) Пусть в f не входят v_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, и предположим, что u_1 входит в f. Тогда в f не могут входить u_2, z, p_2. Поэтому $f = u_1^{\beta_1}u_3^{\beta_3}e^mp_1^{\varepsilon_1}p_3^{\varepsilon_3}p_4^{\varepsilon_4}$. Здесь $\beta_1 \leqslant 3$, не более одного из чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ отлично от нуля, а также $\varepsilon_1 \leqslant 1$ (так как $p_1^2u_1 = 0$); кроме того, если $\beta_3 = 1$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$ (так как $p_1u_1u_3 = p_3u_1u_3 = p_4u_1u_3 = 0$), а $\beta_1 = 1$ (так как есть редукция $u_1^2u_3 \mapsto c^2p_1^{k-1}z$). Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$u_1e^m,\ p_1u_1e^m,\ p_3u_1e^m,\ p_4u_1e^m,\ u_1u_3e^m,\ u_1^2e^m,\ u_1^3e^m.$$

6) Пусть в f не входят v_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, а также u_1, и предположим, что u_3 входит в f. Тогда в f не входят p_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, u_2, z. Следовательно, $f = u_3e^m$.

7) Пусть в f не входят v_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, u_1, u_3, и предположим, что u_2 входит в f. Тогда в f не входят p_i $(2 \leqslant i \leqslant 4)$, z. Следовательно, f имеет вид $f = p_1^iu_2e^m$ $(0 \leqslant i \leqslant k-2)$.

8) Пусть в f не входят v_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$, u_j $(1 \leqslant j \leqslant 3)$, и предположим, что z входит в f. Тогда в f не входят p_r при $r > 1$, и следовательно, f имеет вид $f = p_1^ize^m$ $(0 \leqslant i \leqslant k-1)$.

9) Наконец, если в f входят только p_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ и e, то f совпадает с одним из следующих мономов:

$$p_1^i e^m (0 \leqslant i \leqslant k-1),\ p_2 e^m,\ p_3 e^m,\ p_4 e^m.$$

Таким образом, мы показали, что любой моном, имеющий нормальную форму, содержится в приведенном выше списке. С учётом следствия 4.12 получаем равенство (5.20).

б) Теперь предположим, что $\Delta = 0$. В этом случае потребуются лишь небольшие изменения в предыдущем рассуждении. А именно, из списка редукций надо исключить редукцию с участием элемента $u_1 v_4$ (сейчас $u_1 v_4 = c \cdot 1 \in \mathrm{HH}^3(R)$), а в списке нормальных форм в наборе (5.24) надо заменить элемент $u_1^3 e^m$ на $u_1 v_4 e^m$ (сейчас $u_1^3 = 0$). □

1.2. Теперь предположим, что $c = 0$ (и k по-прежнему нечётно). Рассмотрим элемент

$$u_1' := (1, x(yx)^{k-1} + d(xy)^k) \in \mathrm{HH}^1(R)$$

и введём в рассмотрение следующее множество (однородных) элементов из $\mathrm{HH}^*(R)$

$$\mathcal{Y}_1' := (\mathcal{Y}_1 \setminus \{u_1\}) \cup \{u_1'\}, \tag{5.26}$$

где $\mathcal{Y}_1$ из (5.2).

Предложение 5.9. *Пусть k нечётно и $c = 0$. Для элементов множества $\mathcal{Y}_1'$ в алгебре* $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (5.3), (5.4), (5.8), (5.10), (5.12), (5.13), (5.18), (5.19), *а также следующие соотношения*:

$$\begin{gathered}
p_2 u_1' = p_1^{k-2} u_2,\ p_1^2 u_1' = 0,\\
u_1' u_2 = u_1' u_3 = 0,\\
p_3 v_1 = p_2 v_3 = p_1 v_2 = p_4 (u_1')^2,\\
p_1 v_1 = p_2 v_2 = p_3 v_3 = 0,\\
p_i v_4 = 0 \ \ \textit{для любого}\, i,\\
p_1 (u_1')^2 = 0,\ u_1' v_2 = p_1^{k-2} z;\\
u_1' v_4 = p_1 u_1' v_3 = 0,\ p_4 (u_1')^3 = p_1^{k-1} z,\\
u_1' z = u_2 z = u_3 z = u_4 z = 0,\\
(u_1')^2 v_1 = (u_1')^2 v_3 = (u_1')^4 = 0.
\end{gathered}$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству предложения 5.2. При этом формула для трансляции $\mathrm{T}^1(u_1')$ элемента u_1' может быть получена непосредственно из формулы для $\mathrm{T}^1(u_1)$, указанной в лемме 5.3: надо сначала в соответствующей матрице положить $c = 0$, а затем умножить её на d^{-1} (поскольку именно таким же образом u_1' получается из u_1). Аналогично (с помощью формул из леммы 5.4) получаются формулы для $\mathrm{T}^1((u_1')^i)$ $(i \in \{2, 3\})$, необходимые для вычисления степеней элемента u_1'. □

Предложение 5.10. *Предположим, что* $c = 0$ *и* k *нечётно. Множество* $\mathcal{Y}_1'$*, указанное в* (5.26)*, порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K*-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_1' \cup \{1\}$. Аналогично доказательству предложения 5.6 достаточно доказать, что $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$ при $0 \leqslant n \leqslant 3$.

Ясно, что $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Далее, включение $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$ следует из соотношений для базисных элементов, указанных в 4.7, п. (а):

$$\begin{aligned}
(x(yx)^i, 0) &= p_1^{i-1}u_2 \ \text{ при } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
(0, x(yx)^{k-1}) &= p_1u_1' + du_3,\\
(y(xy)^{k-1}, 0) &= p_3u_1',\\
((xy)^k, 0) &= p_4u_1'.
\end{aligned}$$

Включение $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$ имеет место, поскольку для базисных элементов, указанных в предложении 4.7, п. (б), выполняются соотношения:

$$\begin{aligned}
&(y(xy)^{i-1},\ x(yx)^{i-1} + d(xy)^i) = p_1^{i-1}v_3 \ \text{ при } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&(1, 0) = (u_1')^2, \quad ((xy)^k, 0) = p_4(u_1')^2.
\end{aligned}$$

Наконец, для базисных элементов группы $\mathrm{HH}^3(R)$, указанных в предложении 4.10, выполняются сооношения:

$$\begin{gathered}
(xy)^i = p_1^{i-1}z \ \text{ при } \ 1 \leqslant i \leqslant k,\\
1 = (u_1')^3,\ x = u_1'v_1,\ y = u_1'v_3,
\end{gathered}$$

и получаем включение $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_1' = K[\mathcal{X}_1']/I_1'$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_1'$ из (2.22), а I_1' – соответствующий идеал соотношений.

Замечание 5.11. Легко проверяется (ср. с леммой 5.8), что из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1'$ вытекает соотношение

$$p_1^{k-1}u_2 = 0.$$

Из предложений 5.9 и 5.10 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_1' \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_1'$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_1'$ (см. (5.26)). Пусть $\mathcal{A}_1' = \bigoplus_{m\geqslant 0}(\mathcal{A}_1')^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_1'$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (1б) теоремы 2.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 5.12. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K(\mathcal{A}_1')^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{5.27}$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 5.7. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_1']$ введем лексикографический порядок такой, что

$$v_2 > v_1 > v_3 > v_4 > u_1' > u_3 > u_2 > z > e > p_2 > p_1 > p_3 > p_4.$$

Рассмотрим следующие элементарные шаги редукции:

$$\begin{array}{ll} p_1v_2 \mapsto p_3v_1 \mapsto p_2v_3 \mapsto p_4(u_1')^2, & \\ u_3v_4 \mapsto p_4(u_1')^3 \mapsto p_1^{k-1}z, & \\ p_2u_1' \mapsto p_1^{k-2}u_2, & u_1'v_2 \mapsto p_1^{k-2}z, \\ u_2v_3 \mapsto p_1z, & v_3z \mapsto p_1u_2e. \end{array}$$

Поскольку эти элементарные шаги соответствуют некоторым соотношениям, выполняющимся в алгебре $\mathcal{A}_1'$, то любой элемент $a \in \mathcal{A}_1'$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме. Через $\widetilde{b}_i$ обозначим число мономов из $(\mathcal{A}_1')^i$, представленных в нормальной форме. Поскольку имеется эпиморфизм $(\mathcal{A}_1')^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то достаточно доказать, что

$$\widetilde{b}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{5.28}$$

Рассуждая аналогично первой части доказательства предложения 5.7, получаем, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке; мы оставляем читателю проведение соответствующих детальных вычислений.

Мономы степени $4m$:

$$\left\{p_1^ie^m\right\}_{i=0}^{k-1},\ p_2e^m,\ p_3e^m,\ p_4e^m;$$

(таких мономов имеется $k+3$);

мономы степени $4m+1$:

$$\left\{p_1^i u_2 e^m\right\}_{i=0}^{k-2},\ u_1' e^m,\ p_1 u_1' e^m,\ p_3 u_1' e^m,\ p_4 u_1' e^m,\ u_3 e^m;$$

(число таких мономов равно $k+4$);

мономы степени $4m+2$:

$$\left\{p_1^i v_3 e^m\right\}_{i=0}^{k-2},\ v_1 e^m,\ v_2 e^m,\ v_4 e^m,\ (u_1')^2 e^m,\ p_4 (u_1')^2 e^m;$$

(число таких мономов равно $k+4$);

мономы степени $4m+3$:

$$\left\{p_1^i z e^m\right\}_{i=0}^{k-1},\ u_1' v_1 e^m,\ u_1' v_3 e^m,\ (u_1')^3 e^m;$$

(число таких мономов равно $k+3$).

С учётом следствия 4.12 получаем равенство (5.28), а следовательно, и равенство (5.27). □

Случай 2. В этом разделе мы изучим случай, когда k чётно и больше 2.

2.1. Предположим дополнительно, что $c \neq 0$. Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : $\begin{cases} p_1 := xy + yx,\ p_2 := x(yx)^{k-1}, \\ p_3 := y(xy)^{k-1},\ p_4 := (xy)^k; \end{cases}$

— степени 1 : $\begin{cases} q_1 := (y(xy)^{k-2} + c(yx)^{k-1},\ 1 + dy), \\ q_2 := (1 + cx, x(yx)^{k-2} + d(xy)^{k-1}); \end{cases}$

— степени 2 : $v_1 := (x, 0)$, $v_2 := (0, y)$, $v_3 := (y + cyx, x + dxy)$;

— степени 4 : $e := 1$.

Предложение 5.13. *Пусть $k = 2l$ чётно, $l > 1$, и пусть $c \neq 0$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, v_1, v_2, v_3, e\} \tag{5.29}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются следующие соотношения*:

$$\left.\begin{array}{c} p_1^k = 0,\ p_ip_j = 0\ \text{\textit{при}}\ i \neq j, \\ p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = 0, \end{array}\right\} \tag{5.30}$$

$$p_3q_1 = p_2q_2,\ p_1^{k-1}q_1 = dp_3q_1, \tag{5.31}$$

$$c(p_1q_1 + p_3q_2) = d(p_1q_2 + p_2q_1), \tag{5.32}$$

$$p_2v_1 = p_4v_1 = p_3v_2 = p_4v_2 = p_4v_3 = 0, \tag{5.33}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_2q_1^2 = p_3q_2^2 = 0, \\ p_1v_1 = p_2v_2 = p_3v_3 = p_4q_1^2, \\ p_3v_1 = p_1v_2 = p_2v_3 = p_4q_2^2, \end{array}\right\} \tag{5.34}$$

$$\left.\begin{array}{c} q_1q_2 = cdl(cp_3v_1 + dp_2v_2), \\ p_1^{k-1}v_3 = cp_3v_1 + dp_2v_2; \end{array}\right\} \tag{5.35}$$

$$\left.\begin{array}{c} q_1v_1 = q_2v_2, \\ q_1^3 + q_2^3 = \Delta(l+1)p_1q_1v_1, \end{array}\right\} \tag{5.36}$$

$$p_1^{k-2}q_2v_3 = cq_1v_1,\ c(q_1v_3 + q_2v_1) = d(q_2v_3 + q_1v_2); \tag{5.37}$$

$$v_3^2 = p_1^2e,\ \ q_2^2v_1 = 0; \tag{5.38}$$

$$q_1^2v_2 = 0, \tag{5.39}$$

$$v_iv_j = 0\ \ \text{\textit{при}}\ i \neq j,\ v_1^2 = v_2^2 = 0. \tag{5.40}$$

Доказательство. Соотношения (5.30), (5.33), (5.40) были получены ранее; – см. формулы (5.3), (5.8), (5.18) в предложении 5.2, а также замечание 5.5. Соотношения (5.31) проверяются непосредственно.

Для доказательства остальных соотношений нам потребуются трансляции первого порядка для элементов $q_1, q_2 \in \mathcal{Y}_2$ и их степеней. Они приводятся в следующих двух леммах, а их проверка осуществляется прямыми вычислениями (ср. доказательство леммы 5.3). При описании трансляций q_2 мы используем вспомогательное отображение

$$\sigma := \sigma_0 \otimes \sigma_0 \colon \Lambda \to \Lambda, \tag{5.41}$$

где $\sigma_0 \colon R \to R$ – (аддитивное) отображение которое каждый элемент w из стандартного базиса алгебры R (см. (3.1)) переводит в элемент, полученный из w заменой каждого вхождения x (соответственно y) на y (соответственно, на x); кроме того, линейную комбинацию этих базисных элементов, коэффициенты которых содержат вхождение параметров c, d (так выглядят элементы матриц, которыми мы описываем отображения между модулями Q_m), переводим в линейную комбинацию (базисных элементов вида $\sigma_0(w), w \in \mathcal{B}$), коэффициенты которой получаются заменой вхождений параметра c (соответственно d) на d (соответственно, на c).

Лемма 5.14. *В качестве трансляций элементов q_1, q_2 можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^1(q_1) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
t_{11} := (\mathrm{T}^1(q_1))_{11} = {} & c\sum_{i=0}^{k-1}(xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} + c\sum_{i=1}^{k-2}(yx)^i \otimes (yx)^{k-1-i} \\
& + \sum_{i=1}^{k-1} y(xy)^{i-1} \otimes (xy)^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-2}(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} \\
& + d\sum_{i=1}^{k-1} iy(xy)^{i-1} \otimes y(xy)^{k-1-i} + cd\sum_{i=1}^{k-1} iy(xy)^{i-1} \otimes (yx)^{k-i}, \\
t_{12} := (\mathrm{T}^1(q_1))_{12} = {} & \sum_{i=0}^{k-3}(xy)^i \otimes x(yx)^{k-2-i} + d\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)(xy)^{k-1-i} \otimes (yx)^i \\
& + d\sum_{i=0}^{k-2}(xy)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + d^2\sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i \otimes y(xy)^{k-1-i} \\
& + cy(xy)^{k-2} \otimes (yx)^{k-1} + cy(xy)^{k-3} \otimes (xy)^k \\
& + cdy(xy)^{k-2} \otimes y(xy)^{k-1} + x(yx)^{k-2} \otimes 1, \\
t_{21} := (\mathrm{T}^1(q_1))_{21} = {} & c\sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i} + \sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-2-i} \\
& + \sum_{i=1}^{k-1} id(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} + cd\sum_{i=1}^{k-1} i(yx)^i \otimes x(yx)^{k-1-i}, \\
t_{22} := (\mathrm{T}^1(q_1))_{22} = {} & d\sum_{i=1}^{k-2} i \cdot x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i} + d^2\sum_{i=1}^{k-1} ix(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i} \\
& + c(yx)^{k-2} \otimes x(yx)^{k-1} + (yx)^{k-2} \otimes (yx)^{k-1} + d(yx)^{k-2} \otimes y(xy)^{k-1} \\
& + dy \otimes 1 + 1 \otimes 1 + cd(yx)^{k-2} \otimes (xy)^k;
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^1(q_2) = \begin{pmatrix} \sigma(t_{22}) & \sigma(t_{21}) \\ \sigma(t_{12}) & \sigma(t_{11}) \end{pmatrix}. \tag{5.42}$$

В следующей лемме мы укажем трансляцию первого порядка для q_1^2; это нам необходимо для вычисления элемента q_1^3 (ср. с леммой 5.4).

Лемма 5.15. *В качестве трансляции* $\mathrm{T}^1(q_1^2)$ *можно взять гомоморфизм, определяемый матрицей*

$$\mathrm{T}^1(q_1^2) = \begin{pmatrix} cd^2l(xy)^k \otimes 1 + d^4(l+1)(xy)^k \otimes (yx)^{k-1} \\ * \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^1(q_1^2))_{21} =& 1\otimes 1 + d\otimes y + d^2 \otimes x(yx)^{k-1} + c^2d^2l(xy)^k \otimes (xy)^{k-1} \\ &+ d^3(l+1)(xy)^k.\end{aligned}$$

Доказательство. Пользуясь леммой 5.14, мы получаем, что

$$q_1^2 = \mu\mathrm{T}^0(q_1)\mathrm{T}^1(q_1) = (cd^2l(xy)^k,\ 1 + d^3(l+1)(xy)^k),$$

и теперь легко проверяем, что $\mathrm{T}^0(q_1^2)d_2 = d_0\mathrm{T}^1(q_1^2)$. □

Доказательство предложения 5.13 завершается с помощью прямых вычислений с матрицами, описанными в леммах 5.3, 5.14 и 5.15, и это предоставляется проделать читателю. □

Замечание 5.16. При вычислении q_2^3 мы используем формулу для $\mathrm{T}^1(q_2^2)$ которая получается из формулы, указанной в лемме 5.15, с помощью отображения σ (ср. (5.42)).

Предложение 5.17. *Предположим, что* k *чётно и* $k > 2$, *а* $c \neq 0$. *Множество* $\mathcal{Y}_2$, *указанное в* (5.29), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K-*алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_2 \cup \{1\}$. Как и доказательстве предложения 5.6, нам достаточно убедиться, что $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$ при $0 \leqslant n \leqslant 3$.

Ясно, что $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Далее, включение $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$ следует из соотношений для базисных элементов, указанных в предложении 4.8, п. (a):

$$\begin{aligned}&(xyx, 0) = d^{-1}(p_1q_1 + p_3q_2),\\ &(x(yx)^i, 0) = d^{-1}p_1^iq_1 \ \text{ при } \ 2 \leqslant i \leqslant k-1,\\ &(0, x(yx)^{k-1}) = p_2q_1 + dp_4q_1,\\ &(y(xy)^{k-1}, 0) = p_3q_2 + cp_4q_2,\\ &((xy)^k, 0) = p_4q_2, \quad (0, (xy)^k) = p_4q_1.\end{aligned}$$

Включение $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$ имеет место, поскольку для базисных элементов, указанных в предложении 4.8, п. (б), выполняются соотношения:

$$\begin{aligned}
&(1,0) = q_2^2 + c^3(l+1)p_3v_1 + c^2dlp_2v_2,\\
&(0,1) = q_1^2 + d^3(l+1)p_2v_2 + cd^2lp_3v_1,\\
&(y(xy)^{i-1} + c(yx)^i,\ x(yx)^{i-1} + d(xy)^i) = p_1^{i-1}v_3 \ \text{при}\ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&((xy)^k, 0) = p_3v_1, \quad (0, (xy)^k) = p_2v_2.
\end{aligned}$$

Наконец, для базисных элементов группы $\mathrm{HH}^3(R)$, указанных в предложении 4.10, выполняются сооношения:

$$\begin{aligned}
(xy)^i &= d^{-1}p_1^{i-1}(q_1v_3 + q_2v_1) \ \text{при}\ 1 \leqslant i \leqslant k,\\
1 &= q_1^3 + d^3(l+1)p_4q_1^3,\\
x &= q_2v_1, \quad y = q_1v_2,
\end{aligned}$$

и получаем включение $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_2 = K[\mathcal{X}_2]/I_2$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_2$ из (2.24), а I_2 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 5.13 и 5.17 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_2 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_2$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_2$ (см. (5.29)). Пусть $\mathcal{A}_2 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_2^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_2$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (2a) теоремы 2.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 5.18. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_2^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Легко проверяется следующее утверждение.

Лемма 5.19. *Пусть* $c \neq 0$. *В алгебре* $\mathcal{A}_2$ *выполняются соотношения:*

$$\begin{gathered}
p_1^{k-1}q_2 = cp_2q_2,\ p_2q_2^2 = p_3q_2^2 = p_1q_2^2 = p_2q_2^2 = 0,\\
p_2q_1v_2 = p_3q_2v_1 = p_1q_2v_2 = p_2q_2v_3,\ q_1^4 = q_2^4 = 0.
\end{gathered}$$

Доказательство предложения 5.18. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_2]$ введем лексикографический порядок такой, что

$$q_1 > q_2 > v_3 > v_1 > v_2 > e > p_1 > p_2 > p_3 > p_4.$$

Рассмотрим следующие элементарные шаги редукции:

$$
\begin{array}{ll}
p_1q_1 \mapsto c^{-1}d(p_1q_2 + p_2q_1) + p_3q_2, & p_3q_1 \mapsto p_2q_2, \\
p_4q_1^2 \mapsto p_3v_3 \mapsto p_1v_1 \mapsto p_2v_2, & p_4q_2^2 \mapsto p_2v_3 \mapsto p_3v_1 \mapsto p_1v_2, \\
q_1q_2 \mapsto cdl(cp_3v_1 + dp_2v_2), \text{ если } l \text{ нечётно,} & \\
p_1^{k-1}q_1 \mapsto dp_3q_1, & p_1^{k-1}v_3 \mapsto cp_3v_1 + dp_2v_2, \\
q_1v_1 \mapsto q_2v_2, & q_1^3 \mapsto q_2^3 + \Delta(l+1)p_1q_1v_1, \\
q_1v_3 \mapsto c^{-1}d(q_2v_3 + q_1v_2) + q_2v_1, & q_1v_1 \mapsto c^{-1}p_1^{k-2}q_2v_3, \\
v_3^2 \mapsto p_1^2e, & p_2q_1v_2 \mapsto p_2q_2v_3 \mapsto p_3q_2v_1 \mapsto p_1q_2v_2.
\end{array}
$$

Поскольку эти элементарные шаги соответствуют некоторым соотношениям, выполняющимся в алгебре $\mathcal{A}_2$, то любой элемент $a \in \mathcal{A}_2$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме. Через $\widetilde{b}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_2^i$, представленных в нормальной форме. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_2^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то достаточно доказать, что

$$\widetilde{b}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{5.43}$$

Мы докажем, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке. Мономы степени $4m$:

$$\left\{p_1^i e^m\right\}_{i=0}^{k-1},\ p_2e^m,\ p_3e^m,\ p_4e^m;$$

(таких мономов имеется $k+3$);

мономы степени $4m+1$:

$$\left\{p_1^i q_2 e^m\right\}_{i=0}^{k-2},\ q_1e^m,\ p_2q_1e^m,\ p_4q_1e^m,\ p_2q_2e^m,\ p_3q_2e^m,\ p_4q_2e^m;$$

(число таких мономов равно $k+5$);

мономы степени $4m+2$:

$$\left\{p_1^i v_3 e^m\right\}_{i=0}^{k-2}, q_1^2e^m,\ q_2^2e^m,\ v_1e^m,\ v_2e^m,\ p_1v_2e^m,\ p_2v_2e^m;$$

(число таких мономов равно $k+5$);

мономы степени $4m+3$:

$$\left\{p_1^i q_2 v_3 e^m\right\}_{i=0}^{k-3},\ q_2v_1e^m,\ q_1v_2e^m,\ q_2v_2e^m,\ p_3q_2v_1e^m,\ q_2^3e^m;$$

(число таких мономов равно $k+3$).

Будем рассуждать аналогично первой части доказательства предложения 5.7. Пусть

$$f = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} v_3^{\beta_3} v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2} e^m p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} p_3^{\gamma_3} p_4^{\gamma_4} \tag{5.44}$$

– некоторый ненулевой моном, имеющий нормальную форму. Ввиду соотношений, выполняющихся в алгебре $\mathcal{A}_2$, а также с учётом некоторых элементарных шагов редукции в формуле (5.44) выполняются соотношения:

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \in \{0, 1\},$$
$$\alpha_1 \leqslant 3, \alpha_2 \leqslant 3, \ \gamma_1 \leqslant k-1, \ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

1) Предположим, что в f входит q_1. Тогда ввиду некоторых соотношений, выполняющихся в алгебре $\mathcal{A}_2$, следует, что в f не входят q_2 (есть редукция $q_1q_2 \mapsto \dots$), v_1 (есть редукция $q_1v_1 \mapsto \dots$), v_3 (есть редукция $q_1v_3 \mapsto \dots$), p_1, p_3(есть редукции $p_1q_1 \mapsto \dots$ и $p_3q_1 \mapsto \dots$). При этом если $\beta_2 = 1$, то $\gamma_2 = 0$ (есть редукция $p_2q_1v_2 \mapsto \dots$) и $\gamma_4 = 0$ (так как $p_4v_2 = 0$), кроме того, $\alpha_1 \leqslant 2$ (есть редукция $q_1^3 \mapsto \dots$), а если $\alpha_1 = 2$, то $\beta_2 = 0$ (так как $q_1^2v_2 = 0$). Таким образом, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$q_1e^m, \ p_2q_1e^m, \ p_4q_1e^m, \ q_1v_2e^m, \ q_1^2e^m.$$

2) Предположим, что q_1 не входит в f, но в f входит q_2. Тогда аналогично предыдущему заключаем, что f совпадает с одним из следующих мономов:

$$p_1^iq_2e^m(0 \leqslant i \leqslant k-2), \ p_2q_2e^m, \ p_3q_2e^m, \ p_4q_2e^m, \ q_2v_1e^m, \ q_2v_2e^m,$$
$$p_1^iq_2v_3e^m(0 \leqslant i \leqslant k-3), \ p_3q_2v_1e^m, \ q_2^2e^m, \ q_2^3e^m.$$

3) Пусть в f не входят q_1, q_2, и предположим, что v_3 входит в f. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что f имеет вид $f = p_1^iv_3e^m$ $(0 \leqslant i \leqslant k-2)$.

4) Пусть в f не входят q_1, q_2, v_3, и предположим, что v_1 входит в f. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что в этом случае f имеет вид $f = v_1e^m$.

5) Пусть в f не входят q_1, q_2, v_3, v_1, и предположим, что v_2 входит в f. Тогда f совпадает с одним из следующих мономов:

$$v_2e^m, \ p_1v_2e^m, \ p_2v_2e^m.$$

6) Наконец, если в f входят только p_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ и e, то f совпадает с одним из следующих мономов:

$$p_1^ie^m(0 \leqslant i \leqslant k-1), \ p_2e^m, \ p_3e^m, \ p_4e^m.$$

Таким образом, мы показали, что любой моном, имеющий нормальную форму, содержится в приведенном выше списке. С учётом следствия 4.12 получаем равенство (5.43). $\square$

2.2. Теперь предположим, что $c=0$ (а k по-прежнему чётно и $k>2$).

Предложение 5.20. *Пусть k чётно и $c=0$. Для элементов множества $\mathcal{Y}_2$ в алгебре* $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (5.30), (5.31), (5.33), (5.34), (5.36), (5.38), (5.40), *а также следующие соотношения*:

$$
\begin{gathered}
p_1q_2 = p_2q_1,\ p_1^2q_2 = 0,\\
q_1q_2 = 0,\ p_1^{k-1}v_3 = dp_2v_2;\\
p_3q_2v_1 = p_1q_2v_2 = p_2q_2v_3,\\
p_1^{k-2}q_1v_3 = dq_2v_2,\ p_1^{k-2}q_2v_3 = 0,\\
p_1q_2v_1 = p_1q_2v_3 = 0,\\
q_1v_2 = q_2v_3,\ q_1^2v_3 = q_2^2v_1 = q_2^2v_2 = 0.
\end{gathered}
$$

Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству предложения 5.13.

Предложение 5.21. *Предположим, что $c=0$, k чётно и $k>2$. Множество $\mathcal{Y}_2$, указанное в* (5.29), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 5.17, поскольку в нём не использовалась обратимость параметра c. □

Пусть $\mathcal{A}_2' = K[\mathcal{X}_2]/I_2'$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_2$ из (2.24), а I_2' – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 5.20 и 5.21 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_2' \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_2$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_2$ (см. (5.29)). Пусть $\mathcal{A}_2' = \bigoplus_{m\geqslant 0}(\mathcal{A}_2')^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_2'$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (2б) теоремы 2.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 5.22. *Для любого $m\geqslant 0$*

$$\dim_K(\mathcal{A}_2')^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Сформулируем следующий вспомогательный факт.

Лемма 5.23. *Пусть $c=0$. В алгебре $\mathcal{A}_2'$ выполняются соотношения:*

$$q_1^2v_2 = q_2^2v_2 = q_2^2v_3 = 0.$$

Доказательство предложения 5.22**.** Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 5.18. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_2]$ введем тот же лексикографический порядок:

$$v_2 > v_1 > v_3 > v_4 > u_1' > u_3 > u_2 > z > e > p_2 > p_1 > p_3 > p_4.$$

Рассмотрим следующие элементарные шаги редукции:

$$\begin{array}{ll}
p_3q_1 \mapsto p_2q_2, & p_2q_1 \mapsto p_1q_1,\\
p_4q_1^2 \mapsto p_3v_3 \mapsto p_1v_1 \mapsto p_2v_2, & p_4q_2^2 \mapsto p_2v_3 \mapsto p_3v_1 \mapsto p_1v_2,\\
p_1^{k-1}q_1 \mapsto dp_3q_1, & p_1^{k-1}v_3 \mapsto dp_2v_2,\\
q_1v_1 \mapsto q_2v_2, & q_1^3 \mapsto q_2^3 + d^3(l+1)p_1q_1v_1,\\
p_2q_2v_3 \mapsto p_3q_2v_1 \mapsto p_1q_2v_2, & q_1v_2 \mapsto q_2v_3,\\
p_1^{k-2}q_1v_3 \mapsto dq_2v_2, & v_3^2 \mapsto p_1^2e.
\end{array}$$

Поскольку эти элементарные шаги соответствуют некоторым соотношениям, выполняющимся в алгебре $\mathcal{A}_2'$, то любой элемент $a \in \mathcal{A}_2'$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме. Через $\widetilde{b}_i$ обозначим число мономов из $(\mathcal{A}_2')^i$, представленных в нормальной форме. Поскольку имеется эпиморфизм $(\mathcal{A}_2')^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то достаточно доказать, что

$$\widetilde{b}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{5.45}$$

Рассуждая аналогично доказательству предложения 5.18, получаем, что все мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке; мы оставляем читателю проведение соответствующих детальных вычислений.

Мономы степени $4m$:

$$\left\{p_1^ie^m\right\}_{i=0}^{k-1},\ p_2e^m,\ p_3e^m,\ p_4e^m;$$

(таких мономов имеется $k+3$);

мономы степени $4m+1$:

$$\left\{p_1^iq_1e^m\right\}_{i=0}^{k-2},\ p_4q_1e^m,\ q_2e^m,\ p_1q_2e^m,\ p_2q_2e^m,\ p_3q_2e^m,\ p_4q_2e^m;$$

(число таких мономов равно $k+5$);

мономы степени $4m+2$:

$$\left\{p_1^iv_3e^m\right\}_{i=0}^{k-2}, q_1^2e^m,\ q_2^2e^m,\ v_1e^m,\ v_2e^m,\ p_1v_2e^m,\ p_2v_2e^m;$$

(число таких мономов равно $k+5$);

мономы степени $4m+3$:

$$\left\{p_1^i q_1 v_3 e^m\right\}_{i=0}^{k-3},\ q_2 v_1 e^m,\ q_2 v_2 e^m,\ q_2 v_3 e^m,\ p_3 q_2 v_1 e^m,\ q_2^3 e^m;$$

(число таких мономов равно $k+3$). С учётом следствия 4.12 получаем равенство (5.45). □

Случай 3. В этом разделе мы, наконец, рассмотрим случай, когда $k=2$.

Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 0 : $\begin{cases} p_1 := xy + yx,\ p_2 := x(yx), \\ p_3 := y(xy),\ p_4 := (xy)^2; \end{cases}$

– степени 1 : $\begin{cases} \widetilde{q}_1 := (y + cyx,\ 1 + dy + xy), \\ \widetilde{q}_2 := (1 + cx + yx, x + dxy); \end{cases}$

– степени 2 : $v_1 := (x,0), v_2 := (0,y), v_3 := (y + cyx, x + dxy);$

– степени 4 : $e := 1.$

Предложение 5.24. *Пусть $k=2$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, v_1, v_2, v_3, e\} \tag{5.46}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
p_i p_j = 0 \ \text{ для любых } \ i,j \in \{1,2,3,4\}; \\
p_3\widetilde{q}_1 = p_2\widetilde{q}_2,\ p_1\widetilde{q}_1 + p_3\widetilde{q}_2 = dp_3\widetilde{q}_1, \\
p_2\widetilde{q}_1 + p_1\widetilde{q}_2 = cp_3\widetilde{q}_1, \\
p_2v_1 = p_4v_1 = p_3v_2 = p_4v_2 = p_4v_3 = 0, \\
p_1v_1 = p_2v_2 = p_3v_3 = p_4\widetilde{q}_1^{\,2}, \\
p_3v_1 = p_1v_2 = p_2v_3 = p_4\widetilde{q}_2^{\,2}, \\
\widetilde{q}_1\widetilde{q}_2 = cd(cp_3v_1 + dp_2v_2), \\
p_1^{k-1}v_3 = cp_3v_1 + dp_2v_2; \\
\widetilde{q}_1v_1 = \widetilde{q}_2v_2,\ \widetilde{q}_1^{\,3} = \widetilde{q}_2^{\,3}, \\
\widetilde{q}_1v_1 + \widetilde{q}_2v_1 + \widetilde{q}_1v_3 + p_1\widetilde{q}_1v_1 = 0, \\
\widetilde{q}_1v_1 + \widetilde{q}_1v_2 + \widetilde{q}_2v_3 + p_1\widetilde{q}_1v_1 = 0; \\
v_iv_j = 0 \ \text{ при всех } \ i,j \in \{1,2,3\}.
\end{gathered}$$

Доказательство. С учётом вычислений в доказательстве предложения 5.13, а также замечания 5.5 нам потребуются только трансляции подходящих порядков для элементов $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, v_1, v_2 \in \mathcal{Y}_3$, а также элемента $\widetilde{q}_1^2$. Они приводятся в следующих двух леммах, а их проверка осуществляется прямыми вычислениями (ср. доказательство леммы 5.3).

Лемма 5.25. *В качестве трансляций элементов $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, v_1, v_2$ можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^1(\widetilde{q}_1) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} t_{11} = (\mathrm{T}^1(\widetilde{q}_1))_{11} &= y \otimes 1 + 1 \otimes y + dy \otimes y + cxy \otimes 1 + c \otimes yx \\ &+ xy \otimes y + cdy \otimes yx + c \otimes (xy)^2, \\ t_{12} = (T^1(\widetilde{q}_1))_{12} &= x \otimes 1 + d \otimes xy + dxy \otimes 1 + cyxy \otimes 1 \\ &+ d^2xy \otimes y + cdy \otimes yxy, \\ t_{21} = (\mathrm{T}^1(\widetilde{q}_1))_{21} &= x \otimes 1 + dyx \otimes 1 + cx \otimes x + cy \otimes yx + cdyx \otimes x \\ &+ d(xy)^2 \otimes 1 + cx \otimes xyx, \\ t_{22} = (\mathrm{T}^1(\widetilde{q}_1))_{22} &= 1 \otimes 1 + dy \otimes 1 + 1 \otimes yx + xy \otimes 1 + d \otimes yxy \\ &+ cyx \otimes x + d^2xyx \otimes 1 + cd \otimes (xy)^2; \end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^1(\widetilde{q}_2) = \begin{pmatrix} \sigma(t_{22}) & \sigma(t_{21}) \\ \sigma(t_{12}) & \sigma(t_{11}) \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^1(v_1) = \begin{pmatrix} x \otimes 1 + cx \otimes x + c^2x \otimes yxy \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_1) = \begin{pmatrix} * \\ yx \otimes xyx + x \otimes (xy)^2 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}^2(v_1))_{11} = &1 \otimes (xy)^2 + xy \otimes xy + y \otimes xyx + yxy \otimes x \\ &+ cyxy \otimes yxy + y^2 \otimes yxy; \end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^1(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \otimes 1 + dy \otimes y + d^2y \otimes xyx \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_2) = \begin{pmatrix} xy \otimes yxy + y \otimes (xy)^2 \\ * \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^2(v_2))_{21} = &1 \otimes (xy)^2 + yx \otimes yx + x \otimes yxy + xyx \otimes y\\ &+ dxyx \otimes xyx + x^2 \otimes xyx.\end{aligned}$$

Лемма 5.26. *В качестве трансляции* $\mathrm{T}^1(\widetilde{q}_1^2)$ *можно взять гомоморфизм, определяемый матрицей*

$$T^1(\widetilde{q}_1^2) = \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}(T^1(\widetilde{q}_1^2))_{11} = &x \otimes 1 + cx \otimes x + cdxyx \otimes 1 + c^2 x \otimes yxy\\ &+ cd^2(xy)^2 \otimes 1 + c^2 d(xy)^2 \otimes y,\\ (T^1(\widetilde{q}_1^2))_{21} = &1 \otimes 1 + d \otimes y + d^2 \otimes x(yx) + c^2 dxyx \otimes xy\\ &+ c^2 d^2 \otimes (xy)^2 \otimes xy;\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 5.15. □

Доказательство предложения 5.24 завершается с помощью прямых вычислений с матрицами, приведёнными в леммах 5.25, 5.26 и 5.3. □

Предложение 5.27. *Предположим, что* $k = 2$. *Множество* $\mathcal{Y}_3$, *указанное в* (5.46), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K*-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_3 \cup \{1\}$. Как и доказательстве предложения 5.6, нам достаточно убедиться, что $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$ при $0 \leqslant n \leqslant 3$.

Ясно, что $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Далее, включение $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$ следует из соотношений для базисных элементов, указанных в 4.9, п. (а):

$$(xyx, 0) = p_2 q_2,\ ((xy)^2, 0) = p_4 q_2,\ (0, (xy)^2) = p_4 q_1.$$

Включение $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$ вытекает из следующих соотношений для базисных элементов, указанных в предложении 4.9, п. (б):

$$\begin{aligned}&(1, 0) = q_2^2 + v_2 + cdp_1 v_2 + c^2 dp_1 v_1,\\ &(0, 1) = q_1^2 + v_1 + cdp_1 v_1 + cd^2 p_1 v_2,\\ &(xyx, 0) = p_1 v_1, \quad (0, yxy) = p_1 v_2.\end{aligned}$$

Наконец, для базисных элементов группы $\mathrm{HH}^3(R)$, указанных в предложении 4.10, выполняются сооношения:

$$1 = q_1^3 + cdp_1q_1v_1, \quad x = q_2v_1, y = q_1v_2,$$
$$xy = q_1v_1, \quad (xy)^2 = p_1q_1v_1,$$

и получаем включение $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_3 = K[\mathcal{X}_3]/I_3$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_3$ из (2.37), а I_3 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 5.24 и 5.27 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_3 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_3$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_3$ (см. (5.46)). Пусть $\mathcal{A}_3 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_3^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_3$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (3) теоремы 2.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 5.28. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_3^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Лемма 5.29. *В алгебре* $\mathcal{A}_3$ *выполняются соотношения:*

$$p_2\widetilde{q}_2v_2 = 0,\ \widetilde{q}_2^{\,4} = 0,$$
$$\widetilde{q}_1^{\,2}v_2 = \widetilde{q}_1^{\,2}v_3 = \widetilde{q}_2^{\,2}v_1 = \widetilde{q}_2^{\,2}v_3 = 0.$$

Доказательство предложения 5.28. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_3]$ введем лексикографический порядок такой, что

$$\widetilde{q}_1 > \widetilde{q}_2 > v_3 > v_1 > v_2 > e > p_1 > p_2 > p_3 > p_4.$$

Рассмотрим следующие элементарные шаги редукции:

$p_3\widetilde{q}_1 \mapsto p_2\widetilde{q}_2,$
$p_2\widetilde{q}_1 \mapsto p_1\widetilde{q}_2 + cp_3\widetilde{q}_1,$
$p_4\widetilde{q}_2^{\,2} \mapsto p_2v_3 \mapsto p_3v_1 \mapsto p_1v_2,$
$p_1v_3 \mapsto dp_1v_1 + cp_1v_2,$
$\widetilde{q}_1^{\,3} \mapsto \widetilde{q}_2^{\,3},$
$\widetilde{q}_1v_2 \mapsto \widetilde{q}_2v_3 + \widetilde{q}_2v_2 + p_1\widetilde{q}_2v_2.$
$p_1\widetilde{q}_1 \mapsto p_3\widetilde{q}_2 + dp_2\widetilde{q}_2,$
$p_4\widetilde{q}_1^{\,2} \mapsto p_3v_3 \mapsto p_1v_1 \mapsto p_2v_2,$
$\widetilde{q}_1\widetilde{q}_2 \mapsto cd(cp_3v_1 + dp_2v_2),$ если $c \neq 0,$
$\widetilde{q}_1v_1 \mapsto \widetilde{q}_2v_2,$
$\widetilde{q}_1v_3 \mapsto \widetilde{q}_2v_1 + \widetilde{q}_1v_1 + p_1\widetilde{q}_1v_1,$

Эти элементарные шаги соответствуют соотношениям, выполняющимся в алгебре $\mathcal{A}_3$, и потому любой элемент $a \in \mathcal{A}_3$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме. Через $\widetilde{b}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_3^i$, представленных в нормальной форме. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_3^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то достаточно доказать, что

$$\widetilde{b}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{5.47}$$

Рассуждая аналогично доказательству предложения 5.18, получаем, что все мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени $4m$:

$$e^m,\ p_1e^m,\ p_2e^m,\ p_3e^m,\ p_4e^m;$$

мономы степени $4m+1$:

$$q_1e^m,\ p_4q_1e^m,\ q_2e^m,\ p_1q_2e^m,\ p_2q_2e^m,\ p_3q_2e^m,\ p_4q_2e^m;$$

мономы степени $4m+2$:

$$q_1^2e^m,\ q_2^2e^m,\ v_1e^m,\ v_2e^m,\ v_3e^m,\ p_1v_2e^m,\ p_2v_2e^m;$$

мономы степени $4m+3$:

$$q_2v_1e^m,\ q_2v_2e^m,\ q_2v_3e^m,\ p_1q_2v_2e^m,\ q_2^3e^m.$$

С учётом следствия 4.12 получаем равенство (5.47). □

§6. Приложение. Алгебра Йонеды

Здесь мы приводим без подробных доказательств описание алгебры Йонеды для алгебр $R := R_{k,c,d}$ $(k \geqslant 2; c, d \in K)$.

Пусть S – (единственный) простой левый R-модуль. Алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ алгебры R – это прямая сумма $\sum_{m\geqslant 0} \mathrm{Ext}_R^m(S,S)$, на которой умножение задается с помощью произведения Йонеды.

Пусть $P_\bullet \to S$ – минимальная проективная резольвента из предложения 3.1. Поскольку

$$\mathrm{Ext}_R^m(S,S) = \mathrm{H}^m(\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, S)) \simeq \mathrm{Hom}_R(P_m, S),$$

то с использованием техники работ [40, 41] доказывается следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Пусть $R = R_{k,c,d}$. Алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре*

$$K[\xi,\zeta,\eta]/(\xi\zeta,\ \xi^3 - \zeta^3),$$

где $\deg\xi = \deg\zeta = 1,\ \deg\eta = 4.$

Замечание 6.2. Отметим, что описание $\mathcal{Y}(R)$ не зависит от параметров c, d (ср. [1, §5]).

Список литературы

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18**, No. 1 (2006), 55–107.
2. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* II. *Серия* $Q(2\mathcal{B})_1$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* III.*Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **356** (2008), 46–84.
4. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия* $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, a, c)$ *над полем характеристики не* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 63–72.
5. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math., v. 1428, Berlin; Heidelberg. 1990.
6. Th. Holm, *Derived equivalence classification of algebras of dihedral, semidihedral, and quaternion type.* — J. Algebra, **211** (1999), 159–205.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике* 2. — Алгебра и анализ, **16**, No. 6 (2004), 53–122.
8. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 92–129.
9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 28–38.
10. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IV. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k, s, 0)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 67–104.
11. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* V. *Серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **430** (2014), 74–102.
12. А. И. Генералов, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VI. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k, s, 1)$. — Алгебра и анализ, **27**, No. 6 (2015), 89–116.
13. А. И. Генералов, М. А. Филиппов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VII. *Серия* $D(3\mathcal{R})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **460** (2017), 53–81.
14. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ, **21**, No. 2 (2009), 1–51.
15. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 144–202.
16. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* III. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_2$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **400** (2012), 133–157.

17. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* IV. *Алгебра когомологий для серии* $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ *при* $c=0$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **413** (2013), 45–92.
18. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* V. *Серия* $SD(3\mathcal{K})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **435** (2015), 5–32.
19. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VI. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_2$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **443** (2016), 61–77.
20. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VII. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **452** (2016), 52–69.
21. А. И. Генералов, А. А. Зайковский, *О производной эквивалентности алгебр полудиэдрального типа с двумя простыми модулями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **452** (2016), 70–85.
22. А. И. Генералов, А. А. Зайковский, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VIII. *Серия* $SD(2\mathcal{B})_1$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **460** (2017), 35–52.
23. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **321** (2005), 36–66.
24. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **330** (2006), 173–200.
25. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 210–246.
26. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **343** (2007), 121–182.
27. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **365** (2009), 63–121.
28. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **386** (2011), 100–128.
29. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 48–99.
30. Ю. В. Волков, *Алгебра когомологий Хохшильда для одной серии самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Алгебра и анализ, **23**, No. 5 (2011), 99–139.
31. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 100–118.
32. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. V. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **394** (2011), 140–173.
33. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* E_6. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **423** (2014), 205–243.
34. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ, **18**, No. 4 (2006), 39–82.

35. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.* I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ, **19**, No. 5 (2007), 70–123.
36. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца полудиэдральной группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **388** (2011), 119–151.
37. M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring.* — Ann. Math., **78** (1963), 267–288.
38. M. Gerstenhaber, S. D. Schack, *Algebraic cohomology and deformation theory.* — In: Deformation theory of algebras and structures and applications, eds. M. Hazewinkel, M. Gerstenhaber, Kluwer Acad. Publ., NATO ASI Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci., v. 247 (1988), 11–264.
39. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 61–70.
40. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа*, I. — Зап. науч. семин. ПОМИ, **265** (1999), 139–162.
41. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр.* — Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 3 (1999), No. 15, 3–10.

Generalov A. I., Semenov A. V. Hochschild cohomology of algebras of quaternion type, IV: cohomology algebra for exceptional local algebras.

The description of the Hochschild cohomology algebra for a family of local algebras of quaternion type is given in terms of generators and relations. This family appears in the famous K. Erdmann's classification only in the case where the characteristic of the base field is equal to 2.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `ageneralov@gmail.com`

Поступило 6 мая 2019 г.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева
С.-Петербургский гос. университет
14 линия В.О., 29Б
С.-Петербург, 199178, Россия
E-mail: `semandrey@mail.ru`