Николай Вавилов
КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ ТИПА ЛИ

Миникурс из 3-х лекций будет посвящен трем наиболее впечатляющим достижениям последних 60 лет в области теории **конечных групп**, а именно, изложению нескольких подходов к одной из ключевых и наиболее важной для всех математиков части **Классификации** конечных простых групп, а именно построению основной их массы, групп типа Ли, и описанию двух **постклассификационных** достижений — классификации **неприводимых представлений** конечных простых групп и классификации их **максимальных подгрупп**. Это **грандиозные** результаты, доказательства которых занимают многие тысячи страниц. Даже точно *сформулировать* их в рамках короткого курса не представляется возможным, поэтому цель этого миникурса будет состоять в том, чтобы обрисовать **основные конструкции**, дать общее впечатление о том, в каких терминах формулируются получающиеся ответы, и убедить слушателей, что для успешной работы в области *конечной* математики сегодня необходим обширный бэкграунд, относящийся к теории алгебраических групп, комбинаторной и алгебраической геометрии, и т.д.

Лекция 1. Конечные группы типа Ли, классические группы, исключительные группы, группы нормальных типов, скрученные и очень скрученные (группы Судзуки и Ри), различные подходы к их построению, теоремы Стейнберга о задании образующими и соотношениями, построение через эндоморфизмы Фробениуса простых алгебраических групп, конструкции, связанные с конечными геометриями и т.д.

Лекция 2. В классической теории Картана—Вейля конечномерные неприводимые представления простых алгебр/групп Ли строятся в терминах одномерных представлений их картановских подалгебр. Что мешает провести такие же конструкции для конечных групп типа Ли и как с этим бороться? Очень широкими мазками будут обрисованы теории Хариш-Чандры, Делиня—-Люстига и Люстига, которые в своем развитии привели к полному описанию неприводимых комплексных представлений конечных простых групп и связанных с ними групп. Оказывается, даже построение представлений совершенно конкретных маленьких конечных групп, таких как Sp(6,q), требует широчайшего арсенала средств современной алгебраической геометрии и гомологической алгебры.

Лекция 3. Здесь снова нужно руководствоваться аналогией с алгебраическим случаем. Теория Дынкина дает описание максимальных подгрупп алгебр/групп Ли (точнее, сводит такое описание к задаче теории представлений). В последние десятилетия в рамках Maximal Subgroup Classification Project были доказаны аналогичные структурные теоремы для максимальных подгрупп в группах S_n и A_n (теорема О'Нана—-Скотта), в классических группах (теорема Ашбахера) и в исключительных группах типа Ли (теорема Либека—Зейтца). Во многих случаях (например, для всех исключительных групп, кроме групп типов E_7 и E_8) с использованием теории представлений эти результаты были доведены до совершенно явных ответов.

Эти монументальные результаты совершенно изменили весь ландшафт не только теории простых групп, но и всей теории конечных групп и вообще *всей* конечной математики, что еще далеко не осознано математическим сообществом, именно в силу ужасающих пререквизитов и высокой технической сложности.

Спецкурс будет проходить по вторникам в лаборатории Чебышева (14-я линия В.О., дом 29Б). Первая лекция состоится в 14 ноября 2017 в 19.00.