Аналитический семинар лаборатории Чебышева

Четверг, 12 октября 2017, 15:30, ауд. 413, 14-я линия В. О., 29

Юлия Мешкова

О парадоксе Сапонджяна–Бабушки

Результаты предельного перехода иногда могут нас удивлять. Мы обсудим парадокс Сапонджяна–Бабушки в теории тонких пластин. Деформации упругой пластины описываются бигармоническим уравнением $\Delta^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. (Здесь Ω — проекция пластины на горизонтальную плоскость.) Правильная k-угольная пластина изучалась О. М. Сапонджяном. Если край такой пластины жестко закреплен, то в пределе при $k \to \infty$ прогиб пластины стремится к прогибу круглой пластины. Так как при $k \to \infty$ k-угольник „стремится“ к кругу, этот результат выглядит естественным. Однако для свободно опертой k-угольной пластины это не так! О. М. Сапонджян заметил (1952), что предел решений при $k \to \infty$ не обязательно будет иметь конечную энергию.

Краевые условия для случая свободно опертой пластины:

$$u = \Delta u - (1-\sigma)\kappa \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{1}$$

Здесь ν — внешняя нормаль, κ — кривизна $\partial\Omega$ (с учетом знака), $\sigma \in [0, 1/2)$ — физический параметр. На плоских участках границы выполнено $\kappa = 0$. Поэтому для k-угольной пластины условие (1) запишется в виде

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{2}$$

И. Бабушка понял (1961), что из-за разницы между условиями (1) и (2) при аппроксимации криволинейной области многоугольниками (например, при численном моделировании методом конечных элементов) аппроксимативное решение не будет сходиться к решению в криволинейной области.

Описанные результаты принято назвать парадоксом Сапонджяна–Бабушки, хотя они и описывают разные явления. Мы обсудим этот парадокс и способы его устранения.

Приглашаются все желающие!